E1 Séries de Fourier

Valem as seguintes identidades:

$$\begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(kx) = 0 & \forall n,k \in \mathbb{N} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(kx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(kx) = 0 & \forall n \neq k \in \mathbb{N} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) = \pi & \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{E1.1}$$

Observação E1.1. Possível interpretação: As funções

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx), \qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx), \qquad n \in \mathbb{N}$$

formam uma **família ortonormal** com respeito ao produto escalar $< f, g >= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)$ ★

Chamamos **Polinômio trigonométrico de ordem k**

$$S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

Chamamos **Série trigonométrica (ou de Fourier)**

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

Suponhamos que S convirja uniformemente em $\mathbb{R}$, então posso integrar por séries obtendo (**Fórmulas de Euler - Fourier**)

$$\boxed{\begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} S(x) = a_0 \pi \\ \int_{-\pi}^{\pi} S(x) \cos(nx) = a_n \pi \\ \int_{-\pi}^{\pi} S(x) \sin(nx) = b_n \pi \end{cases}} \tag{E1.2}$$

Definição:
Dada $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ absolutamente integrável,
chamamos **Série de Fourier de f** a Série trigonométrica S_f cujos coeficientes são calculados pelas (E1.4) com f no lugar de S.

Pergunta? qual é a relação entre f e S_f?

- f par $\Longrightarrow b_n = 0 \; \forall n$ (S_f é uma série de cossenos, logo é par)
- f ímpar $\Longrightarrow a_n = 0 \; \forall n$ (S_f é uma série de senos, logo é ímpar)
- se f tem descontinuitá e S_f conv. uniformemente, certamente não coincidem!

Porém, se f é regular, as coisas ficam melhores!

Exemplo E1.2. • $\boxed{f = sgn(x) \text{ em } [-\pi,\pi]:}$

$a_n = 0$, $b_n = \dfrac{2}{n\pi}[1-\cos(n\pi)]$, isto é, $\frac{4}{n\pi}$ só para n ímpar.

$$\boxed{S_f = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{sin((2n+1)x)}{2n+1}}$$

• $\boxed{f = |x| \text{ em } [-\pi,\pi] :}$

$b_n = 0$, $a_0 = \pi$, $a_n = \dfrac{2}{n^2\pi}[\cos(n\pi)-1]$, isto é, $-\frac{4}{n^2\pi}$ só para n ímpar.

$$\boxed{S_f = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}}$$

• $\boxed{f = x \text{ em } [-\pi,\pi]:}$

$a_n = 0$, $b_n = -\dfrac{2}{n}\cos(n\pi)$, isto é, $-(-1)^n\frac{2}{n}$.

$$\boxed{S_f = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n sin(nx)}{n}}$$

★

Mais em geral, num intervalo $[-L, L]$ as Fórmulas de Euler - Fourier tornam-se

$$\begin{cases} \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} S(x) = a_0 \\ \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} S(x)\cos\left(\frac{\pi}{L}nx\right) = a_n \\ \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} S(x)\sin\left(\frac{\pi}{L}nx\right) = b_n \end{cases} \tag{E1.3}$$

e a série se escreve

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos\left(\frac{\pi}{L}nx\right) + b_n\sin\left(\frac{\pi}{L}nx\right)$$

E1.1 Teoria L^2

Teorema E1.3. *Seja f^2 é integrável em $[-\pi,\pi]$, sejam S_f sua série de Fourier, S_k a truncada k-ésima de S_f e T_k um qualquer polin.trig. de ordem k. Então*

1. $\int_{-\pi}^{\pi} {S_k}^2 = \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{k} a_n^2 + b_n^2\right)$
2. $\int_{-\pi}^{\pi} (f - S_k)^2 = \left(\int_{-\pi}^{\pi} f^2\right) - \left(\int_{-\pi}^{\pi} {S_k}^2\right) \leq \int_{-\pi}^{\pi} (f - T_k)^2$
   Em particular, $\int_{-\pi}^{\pi} f^2 \geq \int_{-\pi}^{\pi} {S_k}^2$
3. $\sum a_n^2 + b_n^2$ *converge, e logo* $a_n, b_n \to 0$,
4. $\int_{-\pi}^{\pi} (f - S_k)^2 \xrightarrow{k\to\infty} 0$ *difícil!*
5. $\int_{-\pi}^{\pi} f^2 \geq \int_{-\pi}^{\pi} {S_k}^2 \xrightarrow{k\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f^2 = \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2\right)$ $\triangleleft$

Dito de outra forma:
consideramos o espaço vetorial $X = \left\{f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R} : \int_{-\pi}^{\pi} f^2 < \infty\right\}$ dotado do produto escalar $< f, g >= \int_{-\pi}^{\pi} fg$ e da norma $\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f^2$.

1. $\|S_k\|^2 = \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{k} a_n^2 + b_n^2\right)$
2. $\|f - S_k\|^2 = \|f\|^2 - \|S_k\|^2 \leq \|f - T_k\|^2$ ou seja, S_k é o polinômio trigonométrico de ordem k mais perto de f
   Em particular, $\|f\|^2 \geq \|S_k\|^2$
3. $\sum a_n^2 + b_n^2$ converge, e logo $a_n, b_n \to 0$,
4. $\|f - S_k\|^2 \xrightarrow{k\to\infty} 0$ ou seja, $S_k \to f$
5. $\|f\|^2 \geq \|S_k\|^2 \xrightarrow{k\to\infty} \|f\|^2 = \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2\right)$

Mais uma interpretação: o sistema

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad c_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx), \qquad s_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx), \qquad n \in \mathbb{N}$$

forma uma "**base Hilbertiana**" no espaço X (é ortonormal e permite aproximar qualquer elemento do espaço).

Reescrevendo as fórmulas com a normalização acima temos

$$\widehat{S}(x) = a_0 c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n(x) + b_n s_n(x)$$

$$\begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{S}(x) c_0(x) = < \widehat{S}, c_0 > = a_0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{S}(x) c_n(x) = < \widehat{S}, c_n > = a_n \\ \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{S}(x) s_n(x) = < \widehat{S}, s_n > = b_n \end{cases} \tag{E1.4}$$

Análogas às fórmulas conhecidas de GA-AL:

dado o sistema $\{e_i\}$ ortonormal em X,

- se $f = \sum \alpha_i e_i$ então $< f, e_i > = \alpha_i$
- $S_k := \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i$ é a projeção de f no subespaço gerado por $e_1, .., e_k$

No nosso caso, também temos que S_k converge a f quando $k \to \infty$.

Poderíamos fazer a mesma construção usando uma qualquer outra base hortonormal!

> **Conclusão:** temos um resultado de convergência $S_f \to f$ quando f^2 é integrável, mas é uma convergência "integral", diferente da pontual e da uniforme.

E1.2 Convegência pontual e uniforme

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periódica e absolutamente integrável em $[-\pi, \pi]$, contínua (exceto em um número finito de pontos em $[-\pi, \pi]$).

Teorema E1.4. *S_f converge em x_0:*

- *a $f(x_0)$ se f é contínua e existem finitas as derivadas laterais em x_0*
- *a $(L^+ + L^-)/2$ se existem (finitos)*

$$\lim_{x \to x_0^\pm} f = L^\pm \in \mathbb{R}\,, \qquad \lim_{x \to x_0^\pm} \frac{f(x) - L^\pm}{x - x^0} = D^\pm \in \mathbb{R}\,. \quad \triangleleft$$

Poderia não convergir ou convergir a outros valores se alguns dos limites acima não existem.

Teorema E1.5. *Se f é contínua e derivável exceto em um número finito de pontos (em $[-\pi, \pi]$), nos quais existem finitos $L^\pm$ e $D^\pm$, então*

- *S_f converge a f uniformemente em todo $[a, b]$ no qual é contínua,*

- *em particular S_f converge a f uniformemente em $\mathbb{R}$ se f for contínua.*

$\triangleleft$

Teorema E1.6. *Seja $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, 2π periódica.*
Então os coeficientes satisfazem

$$|a_n, b_n| \leq \frac{C_f}{n^2}$$

e logo $S_f \to f$ uniformemente em $\mathbb{R}$.
Isso vale também se tiver um número finito de pontos (em $[-\pi, \pi]$) onde é apenas contínua com derivadas laterais finitas.

$\triangleleft$

Exemplo E1.7.

- $f(x) = \frac{1}{x}\Big|_{[-\pi,\pi]}$,
  não tem como calcular S_f por não ser abs. integrável.
- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}\Bigg|_{[-\pi,\pi]}$,
  podemos calcular S_f, mas em 0 não sabemos se nem onde converge.
- $f(x) = \sqrt{|x|}\Big|_{[-\pi,\pi]}$,
  podemos calcular S_f, mas em 0 não sabemos se nem onde converge.
- $f(x) = |x||_{[-\pi,\pi]}$
  podemos calcular S_f, que converge uniformemente a f
- $f(x) = x|_{[-\pi,\pi]}$
  podemos calcular S_f, que converge uniformemente a f
  em $[-\pi+\varepsilon, \pi-\varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$, e converge para 0 em $\pi + 2k\pi$.
- $f(x) = sgn(x)|_{[-\pi,\pi]}$
  podemos calcular S_f, que converge uniformemente a f
  em $[\varepsilon, \pi-\varepsilon]$ e em $[-\pi+\varepsilon, -\varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$, e converge para 0 em $k\pi$.

★

E2 Escritura complexa

Pondo

$$c_n = \begin{cases} \frac{a_0}{2} & n = 0 \\ \frac{a_n - ib_n}{2} & n > 0 \\ \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} & n < 0 \end{cases} \qquad = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(x) e^{-inx}$$

obtemos

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

Conteúdo

Lista dos teoremas