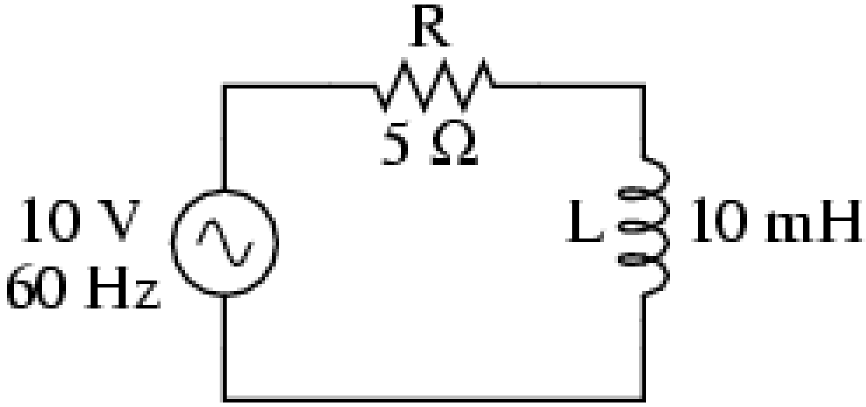
E1 Estudo de um circuito elétrico

Considere o circuito com um gerador de tensão em AC $V_g(t) = V_0 cos(\omega t)$, em série com uma resistor R e um indutor L.



Temos $V_g = V_R + V_L$, $V_L = LI'$, $V_R = RI$, sendo I a correte no circuito: obtemos a EDO

$$\boxed{LI' + RI = V_g = V_0 \cos(\omega t)\,.} \tag{E1.1}$$

Procurando solução por semelhança na forma $I = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ temos ...muita conta....

Trabalhando com complexos podemos pôr $\boxed{V_g(t) = V_0 e^{i\omega t}}$ e procurando solução por semelhança na forma $I(t) = Ce^{i\omega t}$ temos

$$i\omega LI + RI = V_0 e^{i\omega t}\,,$$

logo

$$\boxed{I(t) = \frac{V_0}{R + i\omega L} e^{i\omega t}\,.}$$

Se $V_g(t)$ é um sinal periódico, podemos escrever como

$$\boxed{V_g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n\, e^{int}} \tag{E1.2}$$

então (mas precisa checar as convergências)

$$\boxed{I(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{V_n}{R + inL} e^{int}} \tag{E1.3}$$

Veja Simulação em Geogebra

E1.1

Adicionando un capacitor

$$\boxed{LI'' + RI' + I/C = V_g' = D_0\cos(\omega t)} \tag{E1.4}$$

$$-\omega^2 LI + i\omega RI + I/C = D_0 e^{i\omega t}$$

logo

$$\boxed{I(t) = \frac{D_0}{-\omega^2 L + i\omega R + 1/C} e^{i\omega t}}$$

Para sinal periódico (mas precisa checar as convergências)

$$\boxed{V_g(t)' = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{int} \longrightarrow I(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{D_n}{-n^2 L + inR + 1/C} e^{int}} \tag{E1.5}$$

Analogamente, as equações acima modelam um sistema massa-mola-amortecedor pondo a massa no lugar de L, o amortecedor no lugar de R, a mola no lugar de $1/C$ e uma força periódica no lugar de V_g'.

Teorema E1.1. *Se $\sum_{n=-\infty}^{\infty} nV_n$ converge então (E1.3) é solução de (E1.1). Se $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 D_n$ converge então (E1.5) é solução de (E1.4).* ◁

E2 Equação do calor e da onda

Problema de valores iniciais e de fronteira para a equação do calor

$$\begin{cases} u_t - \alpha u_{xx} = 0, & t > 0, x \in (0, \pi)\,, \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in (0,\pi)\,, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geq 0\,; \end{cases} \tag{E2.1}$$

Possível interpretação: u indica temperatura de uma varinha, de extremos 0 e π com temperatura fixada a 0, e temperatura inicial ϕ. α indica condutividade/calor.específico da varinha.

Trocando a condição em 0 ou π por $u_x(\cdot, t) = 0$ o extremo é isolado (sem passagem de calor)

Problema de valores iniciais e de fronteira para a equação da onda

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2\, u_{xx} = 0, & t > 0, x \in (0, \pi)\,, \\ u(x,0) = \phi(x),\;\; u_t(x,0) = \psi(x), & x \in (0,\pi)\,, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geq 0\,; \end{cases} \tag{E2.2}$$

Possível interpretação: u indica o deslocamento de uma corda de guitarra, de extremos fixados em 0 e em π, com posição e velocidade iniciais sendo ϕ e ψ. c^2 indica tensão/peso da corda.

Trocando a condição em 0 ou π por $u_x(\cdot, t) = 0$ o extremo é solto (movimento transversal livre)

E2.1 O método de separação das variáveis

1) chute: solução $u(x,t) = X(x)\,T(t)$ (a variáveis separadas);

2) substituímos na equação;

3) manipulamos a equação até chegar numa igualdade do tipo

$$F(D^i X(x)|_{i \leq k}) = G(D^i Y(y)|_{i \leq k})\,:$$

isso implica que os dois lados da igualdade devem ser constantes, obtemos então duas EDOs.

- Se a equação for linear e homogênea, poderemos sobrepor diferentes soluções a variáveis separadas.

E2.2 resolvendo..

Substituindo o chute na equação da onda

$$X(x)T''(t) - c^2 X''(x)T(t) = 0\,.$$

Supondo $X \neq 0$ e $T \neq 0$ obtemos

$$\frac{1}{c^2}\frac{T''(T)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} := -\lambda \tag{E2.3}$$

para a equação do calor

$$X(x)T'(t) - \alpha X''(x)T(t) = 0\,.$$

obtemos

$$\frac{1}{\alpha}\frac{T'(T)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} := -\lambda \tag{E2.4}$$

Logo estudemos

$$\begin{cases} -X'' = \lambda X & em \quad (0,\pi), \\ X(0) = 0 = X(\pi)\,, \end{cases} \tag{E2.5}$$

onde λ é um parâmetro real.

As únicas soluções são do tipo $C\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$, com $\lambda = n^2,\ n \in \mathbb{N},\ C \in \mathbb{R}$.

- Resolvendo $T' = -\alpha n^2 T$ obtemos soluções da forma $Ae^{-\alpha n^2 t}$, para o calor,

- resolvendo $T'' = -c^2 n^2 T$ obtendo soluções da forma $A\cos(c\,n\,t) + B\sin(c\,n\,t)$ parta a onda.

E2.3 Solução (pondo $\alpha = c = 1$)

Obtivemos então soluções da equação do calor da forma

$$Ae^{-n^2t}\sin(nx)\,,$$

que correspondem a $\phi(x) = A\sin(nx)$
e soluções da equação da onda da forma

$$[A\cos(nt) + B\sin(nt)]\sin(nx)\,,$$

que correspondem a $\phi(x) = A\sin(nx)$ e $\psi(x) = nB\sin(nx)$

Como os problemas são lineares, também combinações lineares de soluções são soluções. Chegamos então nos seguintes resultados.

Se, no caso do calor, a condição inicial for

$$u(x,0) = \phi(x) = \sum_{n\in N} a_n \sin(nx)\,, \tag{E2.6}$$

então a (única) solução será (?)

$$u(x,t) = \sum_{n\in N} a_n e^{-n^2t}\sin(nx)\,. \tag{E2.7}$$

Teorema E2.1. *Se em (E2.6) $\sum_{n\in N}|a_n|$ converge, então (E2.7) converge uniformemente a uma função contínua em $[0,\pi]\times[0,\infty)$ e infinitas vezes derivável em $[0,\pi]\times(0,\infty)$, e é solução de (E2.1).* $\triangleleft$

No caso da onda, com condições

$$u(x,0) = \phi(x) = \sum_{n\in N} a_n \sin(nx), \qquad u_t(x,0) = \psi(x) = \sum_{n\in N} b_n \sin(nx) \tag{E2.8}$$

teremos a (única) solução (?)

$$u(x,t) = \sum_{n\in N}\left[a_n\cos(nt) + \frac{b_n}{n}\sin(nt)\right]\sin(nx)\,. \tag{E2.9}$$

Teorema E2.2. *Se em* (E2.8) $\sum_{n\in N} n^2|a_n|$ *e* $\sum_{n\in N} n|b_n|$ *convergem então* (E2.9) *converge uniformemente a uma função contínua e com derivadas primeira e segunda contínuas em* $[0,\pi]\times[0,\infty)$ *e é solução de* (E2.2). $\triangleleft$

Observação E2.3. As hipóteses do Teorema E2.2 implicam que $\phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ e $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, de fato estas são condições conhecidas para obter soluções do problema da onda.

As hipóteses do Teorema E2.1 são bem mais fracas, de fato para o calor é suficiente uma condição inicial contínua para ter soluções, as quais são sempre infinitas vezes deriváveis. ★

Observação E2.4. Se for dada ϕ (ou ψ) em $[0,\pi]$ podemos escrever ela como em (E2.6) (ou (E2.8)), prolongando ela até $[-\pi,0]$ de forma ímpar e calculando a série de Fourier resultante, que será só de senos. ★

E2.4 Condição de extremo isolado/solto

Se trocamos a condição nos extremos por $u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$, precisamos estudar

$$\begin{cases} -X'' = \lambda X & \textit{em} \quad (0,\pi), \\ X'(0) = 0 = X'(\pi)\,, \end{cases} \tag{E2.10}$$

onde λ é um parâmetro real.

As únicas soluções são do tipo $C\cos(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$, com $\lambda = n^2$, $n \in \mathbb{N}\cap\{0\}$, $C\in\mathbb{R}$ (note que para $n=0$ a solução é constante!)

Obtemos então soluções da equação do calor da forma

$$Ae^{-n^2 t}\cos(nx)\,,$$

que correspondem a $\phi(x) = A\cos(nx)$
e soluções da equação da onda da forma

$$[A\cos(nt) + B\sin(nt)]\cos(nx)\,.$$

que correspondem a $\phi(x) = A\cos(nx)$ e $\psi(x) = nB\cos(nx)$

Podemos obter resultados análogos aos vistos acima, em particular, se for dada ϕ (ou ψ) em $[0,\pi]$ podemos, prolongar ela até $[-\pi,0]$ de forma par e obter agora uma série só de cossenos.

Conteúdo

Lista dos teoremas