Notas de Aula de SMA 0356 Cálculo IV

Janete Crema Simal

2019

INTRODUÇÃO

Estas notas destinam-se a apoiar os alunos que cursarão a disciplina SMA0356 Cálculo IV e também os docentes que a ministrarão.

Foi planejada para uma disciplina de 60 horas e seu conteúdo foi dividido em três capítulos num total de 26 aulas e não seções, já que não se trata de livro texto. O professor que for ministrar a disciplina pela primeira vez, poderá consultá-la para ter uma ideia do tempo que levará para desenvolver cada assunto.

Propositalmente, o texto é dividido de forma que possam ser aplicadas três avaliações, correspondentes a cada capítulo.

O primeiro capítulo diz respeito a *Sequências e séries numéricas. O segundo é sobre Séries de potências e aplicações em equações diferenciais ordinárias. E o terceiro sobre Séries de Fourier e aplicações nas Equações do Calor e da Onda. Em particular, destaco que o Teorema de Fourier para convergência de séries é apresentado sem demonstração já que o público alvo desta disciplina é composto por alunos dos cursos de engenharia e da física, e acreditamos ser importante que estes vejam as aplicações das séries de Fourier nos processos de difusão e de vibração. Quanto aos alunos do curso de Matemática, terão a oportunidade de aprofundar seus conhecimentos neste tipo de série, na disciplina Equações Diferenciais Parciais.*

Agradeço imensamente ao Professor Miguel Frasson, pelo auxílio inestimável na elaboração das figuras contidas no texto.

São Carlos, 31 de julho de 2018.

Janete Crema Simal

PROGRAMA DA DISCIPLINA SMA0356 CÁLCULO IV:

Objetivos

Familiarizar os alunos com os resultados fundamentais relativos à: sequências e séries numéricas e de funções, séries de Fourier e aplicações.

Programa

- *Sequências numéricas.*
- *Séries numéricas.*
- *Séries de Potências.*
- *Séries de Fourier.*
- *Aplicações de Sequências e Séries na resolução de equações diferenciais.*

Bibliografia

Livros Textos:

- BOYCE, E.W., DIPRIMA, R.C. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno, 7 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002.(Para ser usado em Séries de Fourier e aplicações em EDP.)

- GUIDORIZZI, H.L. Um Curso de Cálculo, vol. 4, 5 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002.

Complementares:

- BUTKOV, E. Física Matemática, Rio de Janeiro: Guanabara 2, 1988.

- CHURCHILL, R., BROWN, J., Fourier series and boundary value problems, 4 ed. New York: McGraw-Hill, 1987.

- SIMMONS, G.F. Cálculo com Geometria Analítica, vol. 2, Rio de Janeiro: Mc Graw-Hill, 1987.

- STEWART, J. Cálculo, vol. 1 e 2, 4 ed., São Paulo: Pioneira, 2001.

- SWOKOWSKI, E.W. Cálculo com Geometria Analítica, vol. 2, 2 ed., Rio de Janeiro: Makron-Books, 1995.

- TOLSTOV, G.P. Fourier Series, New York: Dover, 1976.

Sumário

Capítulo I

Sequências e séries de números reais

I.1 Aula 1: Introdução às sequências numéricas

Vamos iniciar o conteúdo sobre sequências numéricas através de exemplos que trataremos de maneira bem **informal**.

Na antiguidade, se conhecia o conceito de área de retângulos e posteriormente de triângulos e por consequência de polígonos, já que estes podiam ser decompostos em finitos triângulos. Mas conhecer a área de uma círcunferência oferecia um grande desafio aos matemáticos já que não se podia decompor tal figura em finitos triângulos. Daí aparece a ideia de se obter tal área por aproximações sucessivas. Percebeu-se que polígonos regulares podiam ser inscritos na circunferência de tal modo que quanto maior o número de lados do polígono inscrito, mais próxima a área do polígono estaria da circunferência.

Suponhamos então uma circunferência de raio R. Inscrevemos nela o polígono regular acima de n lados. Dividindo-o em n triângulos idênticos, com um dos vértices no centro da circunferência e os demais sobre a circunferência, sabemos que a área do polígono será n vezes a área do triângulo. Seja $\alpha_n = \dfrac{2\pi}{n}$, o ângulo do vértice do triângulo que está sobre o centro da circunferência. Como dois dos seus lados tem tamanho R determinamos, através da Trigonometria, o tamanho do outro lado do triângulo.

$$l_n = 2Rsen\left(\frac{\alpha_n}{2}\right)$$

e consequentemente a área do correspondente triângulo é

$$T_n = R^2 sen\left(\frac{\alpha_n}{2}\right) cos\left(\frac{\alpha_n}{2}\right) = \frac{R^2}{2} sen\alpha_n.$$

Logo a área do polígono regular de n lados, inscrito na circunferência de raio R, é

$$A_n = n \cdot \frac{R^2}{2} sen\alpha_n$$

Como nós já passamos por Cálculo I, conhecemos o limite fundamental $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{senx}{x} = 1$ o que nos dá

$$\lim_{x\to\infty} xsen\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{sen\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$$

o que nos faz acreditar facilmente que

$$\text{\textit{Área da circunferência}} = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{R^2}{2} sen\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \pi R^2 \left[\frac{sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{2\pi}{n}}\right] = \pi R^2.$$

É claro que estamos usando uma linguagem moderna que apareceria cerca de 1800 anos depois deste estudo primitivo de área, o que torna o fato ainda mais incrível!!!! O processo usado pelos Gregos, para o cálculo da área da circunferência, foi denominado mais tarde por **Método da Exaustão**. *Mas além do fato em si, chamamos a atenção para a ideia de limite aí impressa, e mais, da ideia de limite de uma sequência de números. Neste caso a sequência (infinita) fica determinada pelos números $(A_3, A_4, A_5, A_6, \cdots, A_{10000}, \cdots)$.*

Outra ideia, que se apoia no estudo do comportamento de uma sequência infinita de números é o de reta tangente a uma curva, e que apareceu em meados do século XVIII. Nele, fixado um sistema de coordenadas e tendo uma curva plana suave(sem "bicos") dada *pelo gráfico de uma função derivável $f(x)$, buscamos o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico no ponto $(x_0, f(x_0))$, num processo de aproximação. Inicialmente buscamos o coeficiente da reta secante ao gráfico que passa pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + \frac{1}{n}, f(x_0 + \frac{1}{n}))$ obtendo*

$$a_n = \frac{f(x_0 + \dfrac{1}{n}) - f(x_0)}{\frac{1}{n}}.$$

Novamente, para quem já fez Cálculo I, e como tomamos a curva suave, vamos obter que para n cada vez maior, $x_0 + \frac{1}{n}$ fica cada vez mais próximo de x_0 e consequentemente a_n vai tender a $f'(x_0)$.

As ideias acima descritas são, por assim dizer, as ideias primitivas que deram origem ao **Cálculo**. *Por incrível que pareça, primeiro apareceu a ideia primitiva da integral(através do cálculo de área), depois da derivada. Mas por fim, o cálculo só pode se concretizar depois de formalizada a ideia do limite. E o conceito de limite de funções, também só foi aparecer depois do de limite de sequências numéricas. Assim o nosso primeiro objeto de estudo será o das sequências numéricas infinitas, $(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$ e os padrões(alguns padrões) que elas descrevem a medida que a observamos para n cada vez maior. De modo geral definimos:*

Definição I.1.1. *Uma sequência de números reais é uma função discreta $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ onde denotaremos $s(n) = a_n$ para $n \in \mathbb{N}$. Neste caso a_n é dito termo geral da sequência.*

Observação I.1. *Trabalhamos com $n \in \mathbb{N}$ mas muitas vezes será conveniente trabalhar por exemplo com $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ onde n_0 é um número natural fixado.*

Representaremos uma sequência também por

$$a_n \quad ou \quad (a_n) \quad ou \quad (a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots).$$

Exemplo I.1.

- $(2, 4, 6, \cdots, 2n, \cdots)$, *sequência de números pares positivos e portanto tem termo geral $a_n = 2n$ para $0 < n \in \mathbb{N}$.*

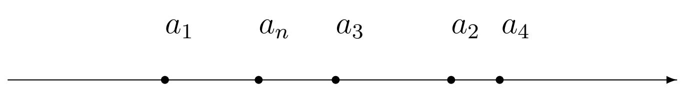
- $(0, 3, 6, \cdots, 3n, \cdots)$ *sequência de inteiros não negativos e múltiplos de 3 cujo termo geral é $a_n = 3n$ para $n \in \mathbb{N}$.*

- $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \cdots, \frac{1}{n}, \cdots,\right)$ cujo termo geral é $a_n = \dfrac{1}{n}$ e neste caso, não faz sentido tomar $n = 0$.

- $(1, 0, 3, 2, 5, 4, 7, 6, \cdots)$ cujo termo geral é $\begin{cases} a_{2n} = 2n+1 & \textit{para } n = 0, 1, 2 \cdots \\ a_{2n+1} = 2n & \textit{para } n = 0, 1, 2 \cdots \end{cases}$

- $(1, -3, \pi, \sqrt{2}, 7, 10, 10^4, \cdots)$. Esta sequência não tem termo geral explícito em função de n pois tomamos valores arbitrários para construí- la.

Podemos representar geometricamente uma sequência, plotando-a sobre uma reta horizontal orientada.



Ao estudar sequências, um dos nossos objetivos será verificar se elas apresentam padrões específicos.

Por exemplo, há 5000 anos os egípcios faziam medições anotando o nível d'água do Rio Nilo em diversas épocas do ano. Com esta coleção de números observaram ciclos de cheia num período de 365 dias, que mais tarde foi chamado de ano. Com suas anotações dividiram este período (o ano) em três outros que denominaram de períodos de cheia, semeadura e colheita. O conjunto de números por eles coletados, apresentavam um padrão periódico. Um exemplo numérico simples de padrão periódico é facilmente observado na sequência $(1 + (-1)^n) = (2, 0, 2, 0, 2, 0 \cdots)$ para $n \in \mathbb{N}$.

Mas existem outros padrões que serão interessantes para nós, e que podem ser percebidos facilmente pelas sequências dadas anteriormente. Por exemplo, observamos facilmente que os elementos das sequências $a_n = 2n$ ou $a_n = 3n$ crescem arbitrariamente, à medida que n fica arbitrariamente grande. Já para os elementos da sequência $a_n = \frac{1}{n}$ observamos que ficam arbitrariamente próximos de 0 a medida que n fica arbitrariamente grande. Não é possível perceber um padrão em $(1, -3, \pi, \sqrt{2}, 7, 10, 10^4, \cdots)$.

Podemos buscar inúmeros exemplos de sequências, nos apoiando nas funções reais estudadas no Cálculo I. Tomemos $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$. Por estar definida em $[0, \infty)$, em particular *também está definida em $\mathbb{N}$ e assim sua restrição a este conjunto fornecerá uma sequência real*

$$a_n = f(n).$$

Exemplo I.2.

- $a_n = n$ *para* $n \in \mathbb{N}$ *que vem de* $f(x) = x$.
- $a_n = e^{-n}$ *para* $n \in \mathbb{N}$ *que vem de* $f(x) = e^{-x}$.
- $a_n = \dfrac{n}{n^2 - n + 1}$ *para* $n \in \mathbb{N}$ *neste caso* $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x + 1}$
- $a_n = (-1)^n = cosn\pi$ *para* $n > 0$ *ou* $(-1, 1, -1, 1, \cdots)$.

Mas nem toda sequência é restrição de funções reais ao conjunto dos números naturais.

Exemplo I.3.

- $a_n = n!$ *ou* $(1, 1, 2, 6, 24, \cdots, n!, \cdots)$.
- $a_n = \dfrac{(-3)^n}{n!}$.
- $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} \text{ se } n \text{ é par} \\ n! \text{ se } n \text{ é ímpar,} \end{cases}$ *isto é,* $(a_n) = (1, \frac{1}{2}, 6, \frac{1}{4}, 120, \frac{1}{6} \cdots)$

Algumas sequências são obtidas de maneira iterativa que podem ou não resultar numa sequência vinda de funções reais.

Exemplo I.4. *Suponha que $p(n)$ seja uma dada população de indivíduos no período de tempo n, ano n por exemplo. No modelo de dinâmica populacional de Malthus é admitido que a geração seguinte será proporcional a população atual. Assim se $r > 0$ é tal constante de proporcionalidade teremos que*

$$p_{n+1} = rp_n.$$

Note que se tomarmos $p_0 = 1$, ao avaliarmos p_n para alguns valores de n obtemos a sequência:

$$(p_n) = (1, r, r^2, r^3, \cdots, r^n, \cdots).$$

Neste caso é relativamente fácil perceber que dependendo do valor de r a população irá crescer arbitrariamente, manter-se constante ou tender a zero e portanto se extinguir. Mas veremos isso formalmente adiante.

.

Exemplo I.5. *Um modelo populacional mais realístico é dado pela equação logística:*

$$p_{n+1} = \alpha(1 - p_n)p_n, \ \textit{onde } \alpha > 0.$$

Neste modelo é levado em conta que se a população for "muito grande"', mecanismos naturais deverão fazer com que menos indivíduos nasçam, mas se for "pequena"', alimento e espaço em abundância deverão fazer com que a população cresça mais rapidamente.

Exercício I.1. Se $\alpha = \frac{1}{2}$ e $p_0 = 10^{-1}$ escreva os primeiros 6 termos desta sequência.

Através das funções reais de uma variável que buscaremos inspiração para vários dos padrões procurados em sequências.

Definição I.1.2. *a) Uma sequência de números reais a_n será limitada superiormente se existe $N \in R$ tais que $a_n \leq N$ para todo n. Neste caso N é dito uma cota superior para a_n.*

b) Se existe M tal que $a_n \geq M$ para todo n então dizemos que ela é limitada inferiormente. Neste caso M é dito uma cota inferior para a_n.

c) Se a_n for limitada inferiormente e superiormente então dizemos que ela é limitada.

Exemplo I.6.

- $a_n = (-1)^n$ *é limitada pois* $|(-1)^n| = 1$ *e portanto* $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ *para todo* n. *Neste caso* -1 *e* 1 *são respectivamente cotas inferior e superior para* $(-1)^n$.
- $a_n = \frac{1}{n^2}$ *é limitada pois* $0 \leq \frac{1}{n^2} \leq 1$ *para todo* $n > 0$.
- $a_n = n!$ *é limitada inferiormente já que é sequência de números positivos. Mas não é limitada pois para todo* M *existe* $n_0 > M$ *logo, qualquer que seja* $n > n_0$ *temos* $a_n = n! > n > M$. *Logo* a_n *não tem cota superior.*
- $a_n = (-2)^n$ *não é limitada inferiormente nem superiormente.*

Veja que se uma sequência possui uma cota superior N, *qualquer número maior que* N *também o será. Assim faz sentido procurarmos a menor das cotas superiores de uma* *sequência o que denotaremos por Supremo de uma sequência. Não mostraremos, mas todo sequência (a_n) limitada superiormente possui supremo, o que denotaremos por*

$$\sup\{a_n\}.$$

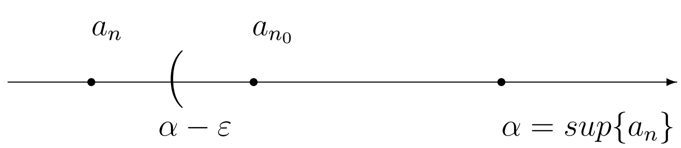
Analogamente, toda sequência limitada inferiormente possui a maior das cotas inferiores o que denominaremos por ínfimo de (a_n) e denotaremos por

$$\inf\{a_n\}.$$

Destacamos os seguintes resultados relativos aos supremo e ínfimo de sequências:

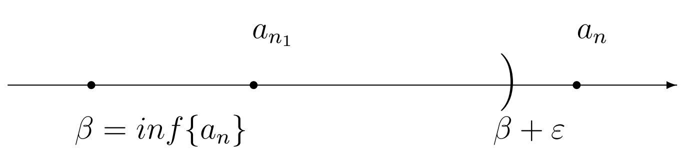
Se a_n é limitada superiormente e $\alpha = \sup\{a_n\}$ então para cada número $\varepsilon > 0$ existe índice n_0 e correspondente elemento a_{n_0} tal que

$$\boxed{a_{n_0} > \alpha - \varepsilon.}$$



De modo inteiramente análogo, se a_n é limitada inferiormente e $\beta = \inf\{a_n\}$ então para cada número $\varepsilon > 0$ existe índice n_1 e correspondente elemento a_{n_1} tal que

$$\boxed{a_{n_1} < \beta + \varepsilon.}$$



I.2 Aula 2: Sequências Convergentes e Divergentes

Podemos classificar uma sequência quanto à monotonicidade.

Definição I.2.1. *Uma sequência (a_n) será dita monótona crescente se existir índice n_0 tal que para $n > n_0$ tem-se $a_n \leq a_{n+1}$. Diremos que será estritamente monótona crescente se existir índice n_0 tal que para $n > n_0$ tem-se $a_n < a_{n+1}$.*

Analogamente, uma sequência (a_n) será dita monótona decrescente se existir índice n_0 tal que para $n > n_0$ tem-se $a_n \geq a_{n+1}$. Diremos que será estritamente monótona crescente se existir índice n_0 tal que para $n > n_0$ tem-se $a_n > a_{n+1}$.

Observação I.2. *Toda sequência estritamente monótona é monótona.*

Exemplo I.7.

- $a_n = n$ *é claramente uma sequência estritamente crescente.*
- $(1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \cdots, \underbrace{n, \cdots, n}_{n \text{ vezes}}, \cdots)$ *é sequência crescente mas não é estritamente crescente.*

Exemplo I.8. *Consideremos uma sequência de números não negativos (a_n) para $n \geq 1$. Com esta construiremos uma outra:*

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

isto é,

$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3 \cdots$

Observe que para todo n temos $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$. Logo (s_n) é uma sequência crescente.

Novamente vamos aproveitar Calculo I para descrever algumas sequências monótonas. Para isso vamos construir sequências que vêm de funções deriváveis $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$. Logo o sinal da derivada de f num intervalo determina se ela é estritamente crescente ou decrescente neste intervalo.

Exemplo I.9.

- *Seja* $a_n = \ln n$, *para* $n > 0$. *Note que para* $f(x) = \ln x$ *temos* $f'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$. *Logo* $f(x)$ *é função estritamente crescente para* $x > 0$ *e portanto também o será para* $0 < n \in \mathbb{N}$. *Logo* $a_n = \ln n$ *é estritamente crescente.*

- $a_n = \dfrac{\ln n}{n}$, *para* $n > 0$. *Neste caso* $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ *e portanto* $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2} < 0$ *para* $x > e$. *Assim em particular* $f(x)$ *será estritamente decrescente para* $x \geq 3$. *Portanto* $a_n = \dfrac{\ln n}{n}$ *é estritamente decrescente para* $n \geq 3$. *O será também para* $n \geq 1$?

Outro modo de verificar se uma sequência é monótona se aplica para sequências de números positivos.

Proposição I.2.2. *Seja* a_n *sequência de números positivos.*

a) Se existe índice n_0 *tal que* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ *para* $n > n_0$ *então* a_n *é sequência estritamente crescente.*

b) Se existe índice n_0 *tal que* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ *para* $n > n_0$ *então* a_n *é sequência crescente.*

c) Se existe índice n_0 *tal que* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ *para* $n > n_0$ *então* a_n *é sequência estritamente decrescente.*

d) Se existe índice n_0 *tal que* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$ *para* $n > n_0$*então* a_n *é sequência decrescente.*

Prova: *Basta observar que como* $a_n > 0$ *e se* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ *para* $n > n_0$ *então* $a_{n+1} > a_n$ *e portanto é estritamente crescente para* $n > n_0$. *Analogamente temos os demais casos.*

Este critério é particularmente interessante para sequências que envolvem produtos.

Exemplo I.10.

- *A sequência de números positivos* $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$ *é estritamente decrescente pois*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{n+1} < 1 \text{ para } n > 1.$$

- *Seja* $a_n = \dfrac{2 \cdot 4. \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}$ *para* $n \geq 1$. *Neste caso*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+2}{2n+1} > 1.$$

  Logo esta sequência é estritamente crescente.

Exercício I.2. *Mostre que* $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$ *é monótona.*

Exercício I.3. *Não vá dormir sem antes fazer um resumo destacando-se os conceitos vistos até agora.*

O próximo padrão procurado numa sequência também vem inspirado por Cálculo I. Sabemos que se tivermos uma função $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *então podemos calcular o*

$$\lim_{x\to\infty} f(x)$$

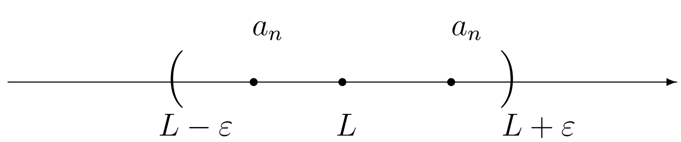
isto é, limite de $f(x)$ *quando* x *tende ao infinito, que pode existir ou não. Dizemos que tal limite existe e é* $L \in \mathbb{R}$ *se*

para cada $\varepsilon > 0$ *existe* $x_0 > 0$ *tal que se* $x > x_0$ *então* $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Vamos utilizar este conceito para definir Sequências Convergentes.

Definição I.2.3. *Seja* (a_n) *sequência de números reais. Diremos que esta sequência converge para* $L \in \mathbb{R}$ *se*

para cada $\varepsilon > 0$ *existe* $n_0 > 0$ *tal que para todo* $n > n_0$ *tem-se* $|a_n - L| < \varepsilon$.



As sequências com tal propriedade são ditas convergentes com limite $L \in \mathbb{R}$ *e são denotadas por*

$$a_n \to L \quad \text{que é o mesmo que escrever} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Usualmente utilizamos a primeira notação por ser mais sucinta. Caso não exista L *nestas condições, dizemos que* (a_n) *diverge ou é sequência divergente.*

Traduzindo em "português" esta definição nos diz que por menor que imaginemos a distância $\varepsilon > 0$ *de* L*, sempre existirá um índice* n_0 *à partir do qual, isto é para todo* $n > n_0$*, a distância dos correspondentes* a_n *a* L *será estritamente menor que* ε*. Logo, a medida que* n *cresce* a_n *fica arbitrariamente próximo de* L*.*

Exemplo I.11. *Seja* $a_n = \dfrac{1}{n!}$*. Mostremos que*

$$\frac{1}{n!} \to 0.$$

De fato, seja $\varepsilon > 0$*. Logo existe índice* n_0 *tal que* $n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon}$*. E mais, se* $n > n_0$ *claramente* $n! > n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon}$*. Logo dado* $\varepsilon > 0$ *existe* n_0 *tal que para para* $n > n_0$ *temos* $\left|\dfrac{1}{n!} - 0\right| = \dfrac{1}{n!} < \varepsilon$*, como queríamos.*

Vejamos alguns exemplos de sequências divergentes.

Exemplo I.12. *Se* $a_n = n$ *qualquer que seja nossa tentativa de encontrar* L *para o qual os* a_n *se aproximem, sempre existirá um* $n_0 > L + 1$*. Logo para todo* $n > n_0$ *teremos* $|a_n - L| = |n - L| > 1$*. Portanto tal sequência diverge.*

Exemplo I.13. *Tome* $a_n = (-1)^n$ *para* $n \geq 0$*, isto é,* $(1, -1, 1, -1, 1, \cdots, (-1)^n, \cdots)$*.*

Pelo esboço acima, fica difícil imaginar que os elementos desta sequência estejam se aproximando de um número específico L *a medida que* n *cresce.*

De fato, suponha por absurdo que tal número L *exista. Façamos três análises:* $L = 1$*,* $L = -1$ *e* $L \neq \{-1, 1\}$*.*

Se $L = 1$ *e se tomarmos* $\varepsilon = 0{,}1 > 0$ *então a Definição I.2.3 nos diz que existe índice* n_0 *tal que para todo* $n > n_0$ *temos que*

$$|(-1)^n - 1| < 0{,}1.$$

Mas qualquer que seja n_0 *dado, se* $n > n_0$ *e* n *for um número ímpar então* $|(-1)^n - 1| = |-1-1| = 2 > 0{,}1$ *o que constitui um absurdo. Com raciocínio análogo vemos que se* $(-1)^n \to L$ *então* $L \neq -1$*.*

Suponhamos então $(-1)^n \to L$ *para* $L \neq 1, -1$*. Seja* d *a menor distância entre* L *e* -1 *e,* L *e* 1*, isto é,* $d = min\{|L-1|, |L+1|\}$*. Tomemos* $\varepsilon = \dfrac{d}{2}$*. Logo para todo* n *temos* $|(-1)^n - L| \geq d > \varepsilon$*.*

Assim $a_n = (-1)^n$ *é sequência divergente.*

Como a Definição I.2.3 nada mais é que a definição de limite de funções reais restrita ao conjunto dos números naturais, o Cálculo I nos fornece inúmeros exemplos de sequências convergentes.

Exemplo I.14.

- *Sabemos que se* $f(x) = a$ *é função constante então* $\lim\limits_{x\to\infty} a = a$ *segue que se* $a_n = a$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *então* $a_n \to a$.
- *Se* $f(x) = e^{-x}$ *e* $a_n = e^{-n}$ *então* $e^{-n} \to 0$.
- *Se* $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$ *e* $a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ *para* $1 < n \in \mathbb{N}$, *então* $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \to 1$.
- *Se* $f(x) = arctgx$ *e* $a_n = arctgn$ *então* $arctgn \to \frac{\pi}{2}$.

Com as técnicas de Cálculo I podemos determinar muitas outras sequências convergentes. Vamos recordá-las nos exemplos abaixo:

Exemplo I.15. *Para funções racionais onde o grau do numerador é menor ou igual ao grau do denominador, dividimos numerador e denominador pelo monômio de maior grau. Por exemplo se* $a_n = \dfrac{n^4 - n^2 + 3n - 5}{2n^4 - 2n^3 - 3n}$ *para* $n > 10$, *dividimos numerador e denominador por* n^4 *obtendo:*

$$a_n = \frac{1 - \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^3} - \frac{5}{n^4}}{2 - \frac{2}{n} - \frac{3}{n^3}} \to \frac{1}{2}.$$

Exemplo I.16. *Agindo de modo análogo com* $a_n = \dfrac{n^3 - n^2 + 3n - 5}{2n^4 - 2n^3 - 3n}$ *obtemos:*

$$a_n = \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^3} - \frac{5}{n^4}}{2 - \frac{2}{n} - \frac{3}{n^3}} \to 0.$$

Exemplo I.17. *Seja* $a_n = \dfrac{\ln\ n}{n}$ *para* $n \geq 1$. *Neste caso utilizamos a regra de L'Hospital.*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\ x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0. \text{ Logo } a_n = \frac{\ln\ n}{n} \to 0.$$

Exemplo I.18. *Seja* $a_n = n^{\frac{1}{n}}$ *para* $n > 0$*, isto é,* $(n^{\frac{1}{n}}) = (1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \cdots)$*. Neste caso basta escrevermos*

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} exp[\ln x^{\frac{1}{x}}] = \lim_{x\to\infty} exp[\frac{1}{x}\ln\ x] = e^0 = 1$$

Logo

$$\boxed{n^{\frac{1}{n}} \to 1.}$$

Exemplo I.19. *Seja* $a_n = nsen\dfrac{1}{n} = \dfrac{sen\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n}} \to 1.$

Exercício I.4. *Um exemplo surpreendente de Cálculo I é dado pela sequência*

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Um raciocínio descuidado levaria a conclusão de que este limite é 1 *o que é* **FALSO!** *Mostre que*

$$\boxed{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e.}$$

Teorema I.2.4. *Toda sequência convergente é limitada.*

Prova: *De fato se* $a_n \to L$ *para algum* $L \in \mathbb{R}$*, da Definição I.2.3 dado* $\varepsilon = 1$ *existe* n_0 *tal que para todo* $n > n_0$ *tem-se* $|a_n - L| < 1$*. Logo para* $n > n_0$ *tem-se* $L - 1 < a_n < L + 1$*. Por outro lado tomemos* $d = max_{n\leq n_0}|a_n|$*. Logo para todo* n *temos que*

$$M = min\{-d, L-1\} < a_n < N = max\{d, L+1\}.$$

Este resultado fornece uma maneira de determinarmos sequências divergentes.

Exemplo I.20. $a_n = n$*,* $a_n = n!$ *são exemplos de sequências divergentes já que não são limitadas.*

Vem do Cálculo I a inspiração para a próxima definição que permitirá visualizar outros casos de sequências divergentes. Lembremos que para $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *temos que*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

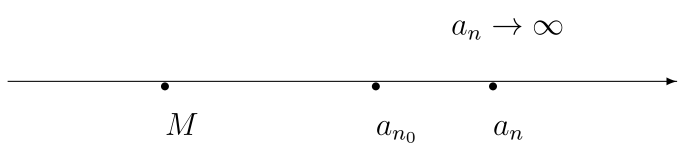
se para cada $M > 0$ existe x_0 tal que se $x > x_0$ então $f(x) > M$.

De modo análogo definimos:

Definição I.2.5. *Uma sequência diverge para o infinito se para todo $M > 0$ existe n_0 tal que se $n \geq n_0$ tem-se $a_n > M$ e neste caso denotamos*

$$a_n \to \infty.$$

Diremos que $a_n \to -\infty$ se $-a_n \to \infty$.



Assim das funções e técnicas de Cálculo I construímos inúmeras sequências que divergem para ∞ ou $-\infty$.

Exemplo I.21.

- $a_n = n \to \infty$.
- $a_n = 2^n \to \infty$.
- $a_n = \dfrac{n}{\ln n} \to \infty$. *Por que?*
- $a_n = \dfrac{n^4 - 10n^2 - n - 10}{n^3 + 4n^2 + 1} \to \infty$. *Por quê?*

I.3 Aula 3: Propriedades e Critérios para sequências convergentes.

Voltando às sequências convergentes:

Teorema I.3.1. *Suponha que $a_n \to L \in \mathbb{R}$. Então L é único.*

Prova: *Suponha por absurdo, existir $\hat{L} \neq L$ tal que também tenhamos $a_n \to \hat{L}$. Dado $\varepsilon = \dfrac{|\hat{L} - L|}{2} > 0$, segue da Definição I.2.3 que*

existe n_0 tal que para todo $n > n_0$ temos $|a_n - L| < \varepsilon$,

existe n_1 tal que para todo $n > n_1$ temos $|a_n - \hat{L}| < \varepsilon$.

Logo para $N_0 = max\{n_0, n_1\}$ e $n > N_0$ temos $|L - \hat{L}| \leq |a_n - L| + |a_n - \hat{L}| < |\hat{L} - L|$ o que é um absurdo.

Proposição I.3.2. *Suponha $a_n \to L_1 \in \mathbb{R}$ e $b_n \to L_2 \in \mathbb{R}$. Então valem as afirmações:*

a) $a_n \pm b_n \to L_1 \pm L_2$.

b) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ temos $\alpha a_n \to \alpha L_1$.

c) $a_n \cdot b_n \to L_1 \cdot L_2$.

d) $|a_n| \to |L_1|$.

e) Se $L_2 \neq 0$ então $\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{L_1}{L_2}$

Prova:

Como $a_n \to L_1$ e $b_n \to L_2$, dado $\varepsilon > 0$ existem n_0, n_1 tais que

$$\text{Para todo } n > n_0 \text{ tem-se que } |a_n - L_1| < \varepsilon/2 \tag{1}$$

$$\text{Para todo } n > n_1 \text{ tem-se que } |b_n - L_2| < \varepsilon/2. \tag{2}$$

Seja $N_0 = max\{n_0, n_1\}$. Logo para todo $n > N_0$ temos que valem (1) e (2).

a) Pelo dito acima temos que se $n > N_0$ então

$$|a_n + b_n - (L_1 + L_2)| \leq |a_n - L_1| + |b_n - L_2| < \varepsilon.$$

De modo inteiramente similar trabalhamos com a sequência $a_n - b_n$, logo temos a).

b) Exercício.

c) $|a_n \cdot b_n - L_1 \cdot L_2| = |a_n \cdot b_n - a_n L_2 + a_n L_2 - L_1 L_2| \leq |L_2||a_n - L_1| + |a_n||b_n - L_2| \leq (|L_2| + |a_n|) \cdot \varepsilon$, *se* $n > N_0$. *Mas pelo Teorema I.2.4 existe* $M > 0$ *tal que para todo* n *temos* $|a_n| \leq M$.

Logo para cada $\varepsilon > 0$ *existe* $N_0 = max\{n_0, n_1\}$ *tal que para todo* $n > N_0$ *temos*

$$|a_n b_n - L_1 L_2| < (|L_2| + M)\varepsilon,$$

o que nos dá c).

d) Basta notar que $||a_n| - |L_1|| \leq |a_n - L_1|$.

e) Exercício.

Sob condições especiais temos a recíproca de d).

Proposição I.3.3. $a_n \to 0$ *se e somente se* $|a_n| \to 0$.

Prova: *Devido a d) só precisamos mostrar que se* $|a_n| \to 0$ *então* $a_n \to 0$. *Para isso veja que para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* n_0 *tal que para todo* $n > n_0$ *temos* $|a_n - 0| = |a_n| = ||a_n| - 0| < \varepsilon$.

Exercício I.5. *Dê exemplo de uma sequência* a_n *tal que* $|a_n|$ *converge mas* a_n *diverge.*

Vamos novamente apreciar alguns critérios de convergência e divergência de sequências, inspirados por Cálculo I.

Teorema I.3.4. *(Teorema do Confronto) Sejam as sequências reais* a_n, b_n *e* c_n. *Suponha que exista* n_1 *tal que para todo* $n > n_1$ *tenhamos* $a_n \leq b_n \leq c_n$.

a) Se $a_n \to a \in \mathbb{R}$ *e* $c_n \to a \in \mathbb{R}$ *então* $b_n \to a$.

b) Se $a_n \to \infty$ *então* $b_n \to \infty$.

c) Se $c_n \to -\infty$ *então* $b_n \to -\infty$.

Prova:

a) Como a_n *e* c_n *convergem para* $a \in \mathbb{R}$, *podemos dizer que dado* $\varepsilon > 0$ *existe índice* n_0 *tal que para todo* $n > n_0$ *tenhamos* $|a_n - a| < \varepsilon$ *e* $|c_n - a| < \varepsilon$, *o que equivale a dizer que*

$$\text{para todo } n > n_0 \text{ temos } a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \quad \text{e} \quad a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon.$$

Da hipótese concluímos que para $n > max\{n_0, n_1\}$

$$a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon \Longleftrightarrow |b_n - a| < \varepsilon$$

logo $b_n \to a$.

b) Como $a_n \to \infty$ e como $a_n \leq b_n$, para $n > n_1$, segue que para cada $M > 0$ existe n_0 tal que para todo $n > max\{n_0, n_1\}$ temos $b_n \geq a_n > M$. Logo $b_n \to \infty$.

c) Exercício.

Uma consequência de a) é dada por:

Corolário I.3.5. *Seja $a_n \to 0$ e suponha b_n sequência limitada. Então $a_n b_n \to 0$.*

Prova: *Seja $M > 0$ tal que $|b_n| \leq M$. Então*

$$|a_n b_n| \leq M|a_n|, \quad \textit{isto é,} \ -M|a_n| \leq a_n b_n \leq M|a_n|.$$

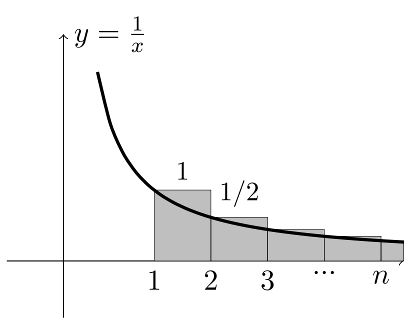
Dos itens b) e d) da Proposição I.3.2 e do item a) do Teorema do Confronto temos $a_n b_n \to 0$.

Exemplo I.22. $a_n = \dfrac{sen(n^{10} + 7n^3 - 2)}{n} \to 0$ *pois* $|sen(n^{10} + 7n^3 - 2)| \leq 1$ *e* $\dfrac{1}{n} \to 0$.

Exemplo I.23. *Definimos a sequência cujo termo geral é*

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Definamos a sequência auxiliar $A_n = \displaystyle\int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1)$ onde sabemos que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty$. Logo como $s_n \geq A_n$ temos pelo item b) do Teorema do Confronto temos que (s_n) diverge para infinito.



Exercício I.6. *Verifique se as sequências abaixo convergem ou divergem. Justifique.*

- $a_n = nsen\dfrac{1}{n^2}$.
- $s_n = 1 + \dfrac{1}{2^\alpha} + \dfrac{1}{3^\alpha} + \dfrac{1}{4^\alpha} + \cdots + \dfrac{1}{n^\alpha}$ *onde fixamos $0 < \alpha \leq 1$.*

Quando pensamos numa sequência estritamente monótona, é fácil imaginar, por exemplo (n), (n^2), $(-n!)$ *e por estes exemplos concluir que toda sequência estritamente monótona diverge para o infinito ou menos infinito, o que é ERRADO.*

Teorema I.3.6. *(Critério de Convergência e Divergência para sequências monótonas).*

a) Seja a_n *sequência monótona crescente e limitada superiormente e seja* $\alpha = \sup\{a_n\}$. *Então*

$$a_n \to \alpha.$$

b) Seja a_n *sequência monótona decrescente e limitada inferiormente e seja* $\beta = \inf\{a_n\}$. *Então*

$$a_n \to \beta.$$

c) Se a_n *é sequência monótona crescente e não limitada superiormente então* $a_n \to \infty$.

d) Se a_n *é sequência monótona decrescente e não limitada inferiormente então* $a_n \to -\infty$.

Prova: *a) Como* $\alpha = sup\{a_n\}$ *temos que* $a_n \leq \alpha$ *para todo* n. *Mas para cada* $\varepsilon > 0$ *sabemos que* $\alpha - \varepsilon$ *não é cota superior de* a_n *logo existe índice* n_0 *e correspondente* a_{n_0} *tal que* $a_{n_0} > \alpha - \varepsilon$. *Mas a sequência também é crescente, logo para todo* $n > n_0$ *teremos* $\alpha - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq \alpha < \alpha + \varepsilon$, *isto é,* $|a_n - \alpha| < \varepsilon$, *como queríamos.*

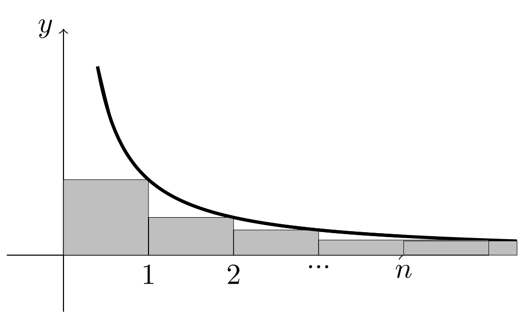
b) Exercício.

c) Como a_n *é monótona crescente, a partir de algum índice temos* $a_n \leq a_{n+1}$. *Por outro lado ela não é limitada, logo para cada* $N > 0$ *existe índice* n_0 *tal que* $a_{n_0} > N$. *Assim para* $n > n_0$ *temos* $a_n \geq N$, *como queríamos.*

d) Exercício.

Exemplo I.24. *Consideremos um caso especial do Exemplo I.8. Definimos a sequência estritamente crescente cujo termo geral é*

$$s_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$



Note que $s_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^2} \leq 1 + \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = 2$. *Logo* (s_n) *é sequência limitada e crescente e portanto convergente.*

Exercício I.7. *Seja* $\alpha > 1$ *um valor fixo. Verifique se* $s_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}$ *converge ou diverge para infinito. Compare com o exercício I.6).*

Exercício I.8. *Não vá dormir sem antes fazer um resumo destacando-se os conceitos fundamentais vistos nesta aula.*

I.4 Aula 4: Subsequências e Método da indução finita

Definição I.4.1. *Sejam (a_n) uma sequência e $\mathbb{N}_1 = \{n_1, n_2, n_3, \cdots\} \subset \mathbb{N}$ subconjunto infinito e ordenado dos naturais, isto é, $n_1 < n_2 < n_3 \cdots$. Diremos que (a_{n_i}), com $n_i \in \mathbb{N}_1$ é subsequência de (a_n) e denotaremos $(a_{n_i}) \subset (a_n)$.*

Exemplo I.25. *A partir de uma única sequência podemos construir inúmeras subsequências. Tomemos por exemplo $(a_n) = (\frac{1}{n}) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \cdots \frac{1}{n}, \cdots)$.*

- *Se $N_1 = \{1, 5, 8, 25, 30, \cdots\}$ neste caso $n_1 = 1$, $n_2 = 5$, $n_3 = 8$, $n_4 = 25$, $n_5 = 30$ e daí teremos a subsequência $(a_{n_i}) = \left(1, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{25}, \frac{1}{30} \cdots\right)$*

- *Se $\mathbb{N}_1$ for o conjunto dos pares positivos temos a subsequência $a_{2n} = \frac{1}{2n}$.*

- *Se $\mathbb{N}_1$ for o conjunto dos ímpares positivos temos $a_{2n-1} = \frac{1}{2n-1}$.*

- *Se N_1 for o conjunto dos múltilpos positivos de 3 temos $a_{3n} = \frac{1}{3n}$.*

Teorema I.4.2. *Seja (a_n) uma sequência.*

$$a_n \to L \in \mathbb{R} \text{ se e somente se } a_{n_i} \to L, \text{ para toda subsequência } (a_{n_i}) \subset (a_n).$$

Prova: *Suponhamos inicialmente que $a_n \to L$. Então para cada $\varepsilon > 0$ existe índice $\hat{n}$ tal que se $n > \hat{n}$ temos $|a_n - L| < \varepsilon$. Seja então $(a_{n_i}) \subset (a_n)$ subsequência qualquer onde $n_i \in \mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$. Mas $\mathbb{N}_1$ é conjunto infinito logo existe $n_{i_0} \in \mathbb{N}_1$ tal que $n_{i_0} > \hat{n}$. Então para todo $n_i > n_{i_0}$ teremos $|a_{n_i} - L| < \varepsilon$. Portanto $a_{n_i} \to L$.*

Para mostrar a recíproca mostraremos que se a_n não converge para L existe subsequência a_{n_i} que também não converge para L.

Se (a_n) não converge para L existe uma distância ε_0 tal que qualquer que seja o índice n_0 escolhido existirá $n_1 > n_0$ tal que $|a_{n_1} - L| \geq \varepsilon_0$.

Se escolhermos $n_0 = 1$ existirá $n_1 > 1$ onde $|a_{n_1} - L| \geq \varepsilon_0$

Se escolhermos n_1 acima existirá $n_2 > n_1$ onde $|a_{n_2} - L| \geq \varepsilon_0$

e assim por diante encontraremos subconjunto $\mathbb{N}_1 = \{n_1, n_2, n_3 \cdots\} \subset \mathbb{N}$ *infinito e ordenado e com ele construímos subsequência* (a_{n_i}) *que não converge para* L*, como queríamos.*

Observação I.3. *Este fato é comumente utilizado para demonstrar quando algumas sequências são divergentes, como veremos nos exemplos abaixo.*

Exemplo I.26.

- *Seja* $a_n = (-1)^n$. *Então* $a_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \to 1$. *Já* $a_{2n-1} = (-1)^{2n-1} = -1 \to -1$. *Logo* $(-1)^n$ *é sequência divergente.*
- *Seja* $a_n = (-1)^n n + n$. *Então* $a_{2n} = 2n \to \infty$. *Logo* (a_n) *diverge.*

Mas será possível verificar a convergência de uma sequência conhecendo-se o comportamento de algumas subsequências especiais? Digo algumas pois ninguém tem tempo de vida suficiente para investigar o comportamento das infinitas subsequências de uma sequência, já que todos estaremos vivos por tempo finito. Para isso vejamos o próximo resultado.

Teorema I.4.3. *Seja* (a_n) *uma sequência e suas subsequências* $(a_{2n}), (a_{2n-1}) \subset (a_n)$. *Se existe* $L \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$a_{2n} \to L, \quad e \quad a_{2n-1} \to L \quad \text{então} \quad a_n \to L.$$

Prova: *Como* $a_{2n} \to L$ *para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* n_0 *tal que se* $2n > n_0$ *temos* $|a_{2n} - L| < \varepsilon$.

Mas $a_{2n-1} \to L$ *logo para cada* $\varepsilon > 0$ *existe índice* n_1 *tal que se* $2n - 1 > n_1$ *temos* $|a_{2n-1} - L| < \varepsilon$. *Logo se* $N_0 = max\{n_0, n_1\}$ *e se* $n > N_0$*, como* n *será par ou ímpar, teremos* $|a_n - L| < \varepsilon$*, como queríamos.*

Observação I.4. *Este resultado será fundamental no estudo das séries alternadas que estudaremos adiante.*

Exemplo I.27. *Façamos agora o estudo do comportamento da sequência* $a_n = r^n$ *onde* $r \in \mathbb{R}$ *é um número fixo. O conhecimento do comportamento desta sequência será fundamental para o estudo de séries numéricas.*

Os casos $r = 0$ *e* $r = 1$ *são triviais, já que as sequências resultantes são constantes. E o caso* $r = -1$ *já vimos que gera a sequência divergente* $(-1)^n$.

Observamos que para $r \neq \{0, 1, -1\}$ podemos reescrever a sequência

$$|r|^n = exp[\ln |r|^n] = exp[n \ln |r|].$$

Assim se $|r| < 1$ temos $\ln |r| < 0$ e portanto $|r|^n \to 0$ e consequentemente $r^n \to 0$.

Mas se $|r| > 1$ temos $\ln |r| > 0$ e portanto $|r|^n \to \infty$. No caso específico de $r > 1$ teremos $r^n = |r|^n \to \infty$. Já se $r < -1$ trabalhamos com a subsequência $r^{2n} = (r^2)^n$. Como $r^2 > 1$ temos $r^{2n} \to \infty$ e portanto (r^n) diverge. Em resumo

$$r^n \to \begin{cases} 0 & se\ |r| < 1 \\ \infty & se\ r > 1 \\ 1 & se\ r = 1 \\ diverge & se\ r \leq -1 \end{cases}$$

Exercício I.9. *Não vá dormir sem antes fazer um resumo destacando-se os conceitos fundamentais vistos nesta aula.*

Vamos abrir um parênteses para falar do **Método da Indução Finita**. *Esta técnica permite verificar se uma propriedade, que observamos ser verdadeira para um número finito de etapas, será verdadeira para qualquer número de etapas.*

Assim seja $P(n)$ uma propriedade que dependa de $n \in \mathbb{N}$. Se quisermos mostrar que ela é válida para todo $n \in \mathbb{N}$ usaremos o Método da Indução Finita, que consiste nas seguintes etapas:

A) Verificamos que $P(0)$ é verdadeira.

B) Supomos que $P(i)$ seja verdadeira para $i \leq n$.(Chamada hipótese de indução)

C) Mostramos que $P(n+1)$ é verdadeira.

Então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observação I.5. *Se em A) trocarmos 0 por 1 ou qualquer natural n_0 teremos $P(n)$ verdadeiro para $n \geq n_0$.*

Exemplo I.28. *Seja a sequência $s_n = 1 + 3 + \cdots + 2n - 1, \quad n > 0$ isto é, para cada n, s_n é a soma dos ímpares até $2n - 1$. Mostre que $s_n = n^2$ para todo $n > 0$.*

Veja que $s_1 = 1 = 1^2$, $s_2 = 1 + 3 = 4 = 2^2$, $s_3 = 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2 \ldots$. Mas será que, por exemplo, $s_{10^5} = 10^{10}$? Para ver isso precisamos do Método da Indução.

Veja que neste caso a propriedade $P(n)$ que queremos mostrar é:

$$P(n): \quad \textit{Se } s_n = 1 + 3 + \cdots + 2n - 1 \textit{ então } s_n = n^2, \textit{ para } n \geq 1.$$

Vimos que $s_1 = 1 = 1^2$ portanto P(1) é verdadeiro. Suponhamos $s_i = 1+3+\cdots+(2i-1) = \sum_{k=1}^{i}(2k-1) = i^2$ para $i \leq n$.

Mas $s_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = s_n + (2n+1)$. Usando a hipótese de indução temos que $s_{n+1} = n^2 + (2n+1) = (n+1)^2$, como queríamos.

Exemplo I.29. *Seja $r \neq 0, 1$. Definimos $s_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \sum_{k=0}^{n} r^k$ para $n \geq 0$. Então*

$$s_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

De fato, para $n = 0$ temos $s_0 = 1 = \frac{1-r}{1-r}$. Suponhamos $s_i = \frac{1 - r^{i+1}}{1 - r}$ para $i \leq n$.

Mas $s_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} r^k = s_n + r^{n+1}$. Usando a hipótese de indução temos que $s_{n+1} = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} + r^{n+1} = \frac{1 - r^{n+1} + r^{n+1} - r^{n+2}}{1 - r} = \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r}$, como queríamos.

Exercício I.10. *Seja (a_n), $n > 0$, sequência qualquer. Construímos nova sequência a partir desta:*

$$s_n = \sum_{k=0}^{n}(a_{k+1} - a_k).$$

Conclua que para $n \geq 0$ vale $s_n = a_{n+1} - a_0$.

Exercício I.11. *Suponha que uma sequência tenha sido obtida recursivamente através de $na_n = a_{n-1}$, para $n \geq 1$. Suponha $a_0 = 1$. Calcule os 5 primeiros desta sequência. Mostre que $a_n = \frac{1}{n!}$*

Exercício I.12. *Repita o procedimento anterior para encontrar uma lei que dependa só de n para:*

a) $n^2 a_n = a_{n-1}$ onde $a_0 = 1$ e $n \geq 1$.

b) $(n-1)a_n = a_{n-1}$ onde $a_1 = 1$ e $n \geq 2$.

I.5 Aula 5 - Teste da razão e da raiz para sequências.

Vamos ver agora um critério de convergência que será útil para trabalharmos com sequências que envolvam potências e produtos. Este critério será revisitado na teoria de séries.

Teorema I.5.1. *(Teste da Razão para sequências)Seja (a_n) sequência de números não nulos tal que*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to L.$$

Então

a) Se $0 \leq L < 1$ temos $a_n \to 0$.

b) Se $L > 1$ ou $L = \infty$ então $|a_n| \to \infty$ e portanto a_n diverge.

c) Se $L = 1$ nada se conclui.

Prova:

a) Suponhamos $0 < L < 1$. Da definição de sequência convergente temos que tomando-se $\varepsilon = \dfrac{1-L}{2} > 0$ existe índice n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ tem-se $||\dfrac{a_{n+1}}{a_n}| - L| < \varepsilon$. Logo temos

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < \varepsilon + L = \frac{1+L}{2} = r < 1 \text{ para } n \geq n_0$$

Assim obtemos:

$|a_{n_0+1}| < \dfrac{1+L}{2}|a_{n_0}| = r|a_{n_0}|,$

$|a_{n_0+2}| < r^2|a_{n_0}|,$

$|a_{n_0+3}| < r^3|a_{n_0}|,$

$\vdots$

$|a_{n_0+k}| < r^k|a_{n_0}|.$

Fazendo $n = n_0 + k > n_0$ concluímos que $|a_n| < (|a_{n_0}|r^{-n_0})\, r^n$. Mas para $|r| < 1$ temos que $r^n \to 0$. Logo pelo Teorema do Confronto I.3.4 temos que $|a_n| \to 0$ e consequentemente $a_n \to 0$. O caso $L = 0$ fica como exercício.

b) $L > 1$. Neste caso tomando-se $\varepsilon = \dfrac{L+1}{2}$ temos que existe índice n_0 tal que para todo $n > n_0$ tem-se $||\dfrac{a_{n+1}}{a_n}| - L| < \varepsilon$. Logo para $n \geq n_0$ temos $|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}| > L - \varepsilon = \dfrac{L+1}{2} = r > 1$. Repetindo o raciocínio do item anterior concluímos que para $n \geq n_0$ tem-se $|a_n| >$

$(|a_{n_0}|r^{-n_0})\, r^n$ *e como* $r^n \to \infty$ *temos que* (a_n) *será não limitada e portanto divergente. Em particular* $|a_n| \to \infty$. *O caso* $L = \infty$ *fica como exercício.*

Exemplo I.30.

- *Seja* $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ *sequência de números positivos. Logo*

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-1} \to e^{-1} < 1.$$

  Portanto $a_n \to 0$. *Veja o exercício I.19.*

- *Seja* $a_n = \dfrac{(-1)^n (2n)!}{n!}$. *Logo*

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \left(\frac{|-1|(2n+1)}{1}\right) \to \infty.$$

  Logo $|a_n| \to \infty$ *e consequentemente* (a_n) *diverge.*

Exercício I.13. *Encontre exemplos (simples) que confirmem o item c) do resultado anterior.*

Exercício I.14. *Use o resultado anterior para concluir se as sequências abaixo convergem ou divergem para o infinito.*

1. $a_n = \dfrac{(-1)^n n!}{(2n)!}$.
2. $a_n = \dfrac{(-n)^n}{(2n)!}$.
3. $a_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n.}$

Observação I.6. *Este resultado será muito importante também para a análise de séries numéricas, que serão estudadas a partir da próxima aula.*

De modo análogo ao teorema anterior podemos demonstrar que:

Teorema I.5.2. *(Teste da Raiz para sequências)Seja* (a_n) *sequência tal que*

$$\sqrt[n]{|a_n|}| \to L.$$

Então

a) Se $0 \leq L < 1$ *temos* $a_n \to 0$.

b) Se $L > 1$ *ou* $L = \infty$ *então* $|a_n| \to \infty$ *e portanto* a_n *diverge.*

c) Se $L = 1$ *nada se conclui.*

Prova: *Exercício.*

Exemplo I.31. $a_n = \dfrac{(-2n)^n}{n^{2n}}$, $n > 0$.

$$\sqrt[n]{\left|\frac{(-2n)^n}{n^{2n}}\right|} = \frac{2}{n} \to 0 < 1.$$

Logo $\dfrac{(-2n)^n}{n^{2n}} \to 0$.

Exemplo I.32. $a_n = n\left(\dfrac{2n-1}{n+4}\right)^n$.

$$\sqrt[n]{\left|n\left(\frac{2n-1}{n+4}\right)^n\right|} = n^{1/n}\left(\frac{2n-1}{n+4}\right) \to 1 \cdot 2 = 2 > 1.$$

Logo $n\left(\dfrac{2n-1}{n+4}\right)^n \to \infty$

I.6 Lista 1 de Exercícios - Sequências Numéricas.

1. *Descubra a o termo geral a_n das sequências abaixo:*

   a) $(1, 2, 4, 8, 16, \cdots)$.

   b) $(1, -1, 1, -1, 1, -1, \cdots)$.

   c) $(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots)$.

   d) $(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \cdots)$.

   e) $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \cdots)$.

   f) $(1, 0, 4, 2, 2, 8, 4, 4, 16, 8, 6, 32 \cdots)$.

2. *Enuncie todos os critérios dados em sala de aula para estabelecer a convergência de sequências numéricas.*

3. *Com os resultados listados acima, estabeleça se as sequências (a_n) abaixo convergem ou divergem, dizendo qual critério usou. Quando for possível calcule o limite da sequência.*

$a)\ \ a_n = n^{1/3}$	$b)\ \ a_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$	$c)\ \ a_n = sen\frac{\pi}{n}$
$d)\ \ a_n = (1,000001)^n$	$e)\ \ a_n = (0,99999999999)^n$	$f)\ \ a_n = \frac{3^n}{2^n+10000}$
$g)\ \ a_n = \frac{\sqrt{n+2}}{2\sqrt{n}}$	$h)\ \ a_n = \frac{n}{(\ln n)^{2,5}}$	$i)\ \ a_n = \frac{n}{(\ln n)^{0.5}}$
$j)\ \ a_n = n^{(-1)^n}$	$k)\ \ a_n = \frac{n^4}{e^n}$	$l)\ \ a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
$m)\ \ a_n = cos\, n\pi$	$n)\ \ a_n = n(1 - cos(1/n))$	$o)\ \ a_n = nsen\,\frac{1}{n}$
$p)\ \ a_n = n\tan\frac{1}{n}$	$q)\ \ a_n = \frac{sen(1+n)}{n!}$	$r)\ \ a_n = n - n^2 sen\frac{1}{n}$
$s)\ \ a_n = (1+3n)^{1/n}$	$t)\ \ a_n = \ln(1 - \frac{7}{n})^n$	$u)\ \ a_n = (1 + a/n)^n$ *para* $a \in R$
$v)\ \ a_n = \frac{(-1)^n(cosn)^{100}}{4^n}$	$x)\ \ a_n = \frac{e^n+e^{-n}}{e^n-e^{-n}}$	$z)\ \ a_n = 1 + cos\ n\pi$

4. *Quais das sequências (a_n) abaixo convergem e quais divergem? Encontre o limite de cada sequência convergente.*

$a)\ a_n = \dfrac{n^3+n+1}{4n^3+2}$ $\qquad b)\ a_n = \dfrac{-10n^5-7n^2+n+5}{6n^6+3n^4+5n^2+3}$ $\qquad c)\ a_n = \dfrac{\sqrt{n^4-3n+1}}{2n^2+1}$

$d)\ a_n = (-1)^n + \dfrac{(-1)^n}{n}$ $\qquad e)\ a_n = \dfrac{-ln(n^2)}{n}$ $\qquad f)\ a_n = ((-1)^n+1)\dfrac{n+1}{n}$

$g)\ a_n = \dfrac{1+\sqrt{2n}}{\sqrt{n}}$ $\qquad h)\ a_n = \dfrac{4^{n+1}+3^n}{4^n}$

5. *Sabendo-se que* $(1+1/n)^n \to e$ *verifique que*

   a) $(1+1/n)^{2n} \to e^2$ *b)* $(1+1/n^2)^{n^2} \to e$ *c)* $(1+1/(2n))^n \to \sqrt{e}$

   d) $(\frac{n+2}{n+1})^n \to e$

6. *Encontre o limite das sequências abaixo fazendo a interpretação geométrica das mesmas:*

   (a) $a_n = \int_1^n \frac{1}{x}dx$

   (b) $a_n = \int_1^n \frac{1}{x^\alpha}dx, \alpha \neq 1$

   (c) $a_n = \int_0^n \frac{1}{1+x^2}dx$

   (d) $a_n = \int\int_{A_n} e^{-\sqrt{x^2+y^2}}dx\,dy$ *para* A_n *a coroa circular* $1/n^2 \leq x^2+y^2 \leq 1,\ n \geq 2$.

   (e) $a_n = \int\int_{A_n} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dx\,dy$ *para* A_n *a coroa circular* $1/n^2 \leq x^2+y^2 \leq 1,\ n \geq 2$. *Calcule as integrais d) e e) usando coordenadas polares.*

7. *Prove que* $n^{\frac{1}{n}}$ *é decrescente para* $n \geq 3$.

8. *Discuta a convergência ou divergência das sequências abaixo analisando se são monótonas e/ou limitadas.*

   a) $a_n = \frac{n}{2^n}$ *b)* $a_n = ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ *c)* $a_n = \frac{n!}{n^n}$ *d)* $a_n = \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$

   e) $s_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k^3$ *f)* $s_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}$ *g)* $s_n = \sum_{k=1}^{n} 1/\sqrt{k}$ *h)* $s_n = \sum_{k=1}^{n}[1/(k(k+1))]$

   Sugestão $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$.

9. *Teste da razão e da raiz para convergência de sequências: Seja* $a_n > 0$ *para todo* n.

   a) Mostre que se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to L$ *onde* $0 \leq L < 1$ *então* $a_n \to 0$. *E se* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to L > 1$ *ou* $L = \infty$ *então* $a_n \to \infty$.

b) Mostre que se $\sqrt[n]{a_n} \to L$ *onde* $0 \leq L < 1$ *então* $a_n \to 0$. *Se* $L = \infty$ *ou* $L > 1$ *então* $a_n \to \infty$.

c) Use o item a) para ver se é possível determinar quais das sequências abaixo convergem para 0*? Quais vão para infinito?*

1) $a_n = n$ *2)* $a_n = n^2/2^n$ *3)* $a_n = \frac{n!}{n^n}$ *4)* $a_n = \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$ *5)* $a_n = \sqrt{n}(\frac{2n-1}{n^2+13})^n$

6) $a_n = \frac{(2n!)}{n^n}$ *7)*$a_n = \frac{2^n}{n!}$ *8)* $a_n = \frac{(2n)!}{n^{2n}}$ *9)* $a_n = \frac{1.\ 3.\ 5.\ 2n-1}{2.\ 4.\ 6\ .2n}$ *10)* $a_n = \left(\frac{3n^3-7n^2+4}{7n^3+n+10}\right)^n$

10. *Assuma como verdadeiro o fato de que*

    "se $a_n \to a$ *então* $\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \to a$ *(ver Guidorizzi - vol.4 - pag.4)"*

    a) Conclua então que se $a_n > 0$ *e* $a_n \to a > 0$ *então* $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} \to a$.

    b) Verifique que se $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to L$ *então* $\sqrt[n]{a_n} \to L$.

    c) Calcule o limite $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ *para as sequências do item c) da questão anterior e veja se é possível dizer quais convergem para zero e quais vao para infinito, usando esta técnica. Compare as duas técnicas e veja em quais exemplos uma se mostrou mais adequada que a outra.*

11. *Encontre o termo geral* a_n *para as sequências abaixo sabendo-se que* $a_0 = 1$ *e que:*

    a) $a_{n+1} = a_n/3$ *b)* $a_{n+1} = (1+j)a_n$ *(j constante fixa)* *c)* $a_n = \sum_{k=1}^{n}(1/3)^k$

    d) $a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}$.

12. *a) Suponha que um capital* a_0 *seja investido numa aplicação que rende juros de* 1% *ao final de cada mês. Descreva o montante* a_n *no mês* n.

    b) Calcule o montante após 36 meses de aplicação se $a_0 = R\$1000,00$.

    c) Caso você fique devendo R\$ 1000,00 para um banco, que cobre 10% *de juros ao mês, qual será sua dívida com o banco no final de 36 meses.(Nunca caia nessa!!!)*

13. *Seja* (a_n) *sequência real e* $a \in R$.

    a) Escreva a definição de $a_n \to a$.

    b) Use a definição para concluir que $a_n \to 0 \Leftrightarrow |a_n| \to 0$.

c) É verdade que $a_n \to a \Leftrightarrow |a_n| \to |a|$ para $a \neq 0$?

d) Conclua, usando a definição, que se (a_n) é sequência real tal que $a_n \to a$ então $a_{n+1} \to a$.

e) Conclua, usando a definição, que se (a_n) é sequência real tal que $a_{2n+1} \to a$ e $a_{2n} \to a$ então $a_n \to a$.

14. *Indique se a frase é verdadeira ou falsa, dando um contra-exemplo quando for falsa e mostrando a afirmação quando for verdadeira.*

   (a) *( ) Toda sequência a_n limitada é convergente.*

   (b) *( ) Toda sequência ilimitada é tal que $a_n \to \infty$ ou $a_n \to -\infty$.*

   (c) *( ) Se $|a_n| \to L$ então a_n é convergente*

   (d) *( ) Toda sequência monótona é convergente.*

   (e) *( ) Toda sequência monótona crescente é tal que $a_n \to \infty$.*

   (f) *( ) Toda sequência monótona decrescente é tal que $a_n \to -\infty$.*

   (g) *( ) Se duas subsequências de uma sequência convergem para o mesmo valor a então a sequência também converge para a.*

   (h) *( ) Se $a_{2n} \to a$ e $a_{3n} \to a$ então $a_n \to a$.*

   (i) *( ) Se $a_n \to \infty$ e $b_n \to 0$ então $a_n b_n \to 0$ pois qualquer número multiplicado por 0 é 0.*

   (j) *( )A sequência $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ é crescente e limitada.*

15. *Sejam a_n e b_n sequências tais que $|a_n - b_n| \leq e^{-n}$. O que se pode dizer sobre o comportamento de ambas no infinito?*

   i) Verifique que se $a_n \to a \in R$ então $b_n \to a$.

   ii) O que ocorre se uma das sequências for para ∞? Justifique. Sugestão: Lembre da desigualdade triangular.

16. *Seja a sequência tal que*

$a_1 = \sqrt{3}$, $a_2 = \sqrt{3 + 2a_1}$, $a_3 = \sqrt{3 + 2a_2}$, $a_{n+1} = \sqrt{3 + 2a_n}$. *Use o Método da indução para mostrar que*

i) Mostre que $1 < a_n \leq 3$.

ii) Mostre que a_n *é crescente.*

Conclua que existe a *tal que* $a_n \to a$ *e que* $a \geq 0$. *Depois mostre que* $a = 3$.

17. *Para as sequências abaixo, calcule os 7 primeiros termos, deduza qual a expressão geral de* a_n *e então confirme seu palpite usando o Método da Indução Finita.*

a) Seja a sequência (a_n) *tal que* $a_0 = 1$ *e* $na_n = a_{n-1}$ *para* $n \geq 1$.

b) $a_0 = 0$ *e* $(n+1)a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{n!}$ *para* $n \geq 0$.

c) $a_0 = a_1 = 1$ *e* $(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n = \frac{2}{n!}$ *para* $n \geq 0$.

d) $a_0 = 0$ *e* $a_1 = 1$ *e* $(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_n = \frac{2}{n!}$ *para* $n \geq 0$.

e) $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ *e* $(n+2)a_{n+2} + 2a_n = 0$ *para* $n \geq 0$.

f) $a_0 = 1$ *e* $a_1 = 0$ *e* $2(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n = 0$ *para* $n \geq 0$.

OBS: Os resultados obtidos serão utilizados na resolução de equações diferenciais. Em particular no Exercício (29) da Lista 3.

18. *(Método de Newton) A sequência a seguir é definida pela fórmula recursiva dada pelo método de Newton:*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Em cada item a seguir, responda se a sequência converge. Em caso afirmativo, qual é o valor do limite? Em cada caso, comece identificando a função f *envolvida:*

(a) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}$.

(b) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n - \frac{\tan x_n - 1}{\sec^2 x_n}$.

(c) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n - 1$.

I.7 Aula 6: Séries Numéricas

Vocês já pensaram no número

$$0,99999999999999\cdots$$

Poderíamos pensar nele como uma soma de infinitos termos

$$0.9+0.09=0.009=\cdots=\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\frac{9}{10000}+\cdots$$

Mas será que faz sentido somarmos infinitas parcelas? Para isso desenvolveremos o conceito de séries.

Dada uma sequência (a_n), $n \geq 0$, *vamos construir uma nova sequência cujo termo geral será definido por:*

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k. \tag{3}$$

Tal sequência é denominada sequência das somas parciais ou reduzidas de a_n. *Se existir* $s \in \mathbb{R}$ *tal que* $s_n \to s$, *isto é* $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, *denotaremos*

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s.$$

Quando isso ocorre dizemos que a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge (para* s*). Caso* s_n *divirja diremos que a série diverge.*

Convergindo ou não denominamos

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

como sendo a série de termo geral a_n.

Observe que a sequência (a_n) fornece as parcelas que serão somadas na série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Quando não estivermos interessados no valor para o qual a série possa convergir escrevemos apenas

$$\sum a_n.$$

Por tratar-se de um caso particular de sequências numéricas veja que temos as seguintes alternativas:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \begin{cases} s \in \mathbb{R}, & \textit{se } s_n \to s \\ \infty, & \textit{se } s_n \to \infty \\ -\infty, & \textit{se } s_n \to -\infty \\ \textit{simplesmente diverge} & \textit{se não existe } \lim s_n \end{cases}$$

Vejamos alguns exemplos de séries.

Exemplo I.33. *Séries Geométricas*

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n + \cdots}$$

é denominada série geométrica de razão r.

Para $r = 1$ temos que $s_n = \underbrace{1 + 1 + \cdots 1}_{n+1 vezes} = n + 1 \to \infty$ e portanto diverge.

Mas vimos no Exemplo I.29 que para $r \neq 1$ tem-se

$$s_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

E pelo Exemplo I.27 sabemos que $r^n \to 0$ somente se $|r| < 1$ e diverge nos outros casos. Assim

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n + \cdots = \begin{cases} \dfrac{1}{1-r} & \textit{se } |r| < 1, \\ \infty & \textit{se } r \geq 1, \\ \textit{diverge} & \textit{se } r \leq -1. \end{cases}$$

Exemplo I.34. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - \left(\frac{-1}{2}\right)} = \frac{2}{3}.$

Vejamos uma aplicação deste fato.

Exemplo I.35. *(Dízimas periódicas) Que número racional $L = 3,511111111\cdots$ representa?.*

Veja que podemos escrever

$$3,51111111111\cdots = 3 + \frac{5}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots = 3 + \frac{5}{10} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{10^n} = 3 + \frac{5}{10} + \frac{1}{10^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n}$$

Logo usando o resultado anterior temos

$$3,51111111111\cdots = 3 + \frac{5}{10} + \frac{1}{10^2}\left(\frac{1}{1-\dfrac{1}{10}}\right) = \frac{316}{90}$$

Exercício I.15. *Repita o procedimento anterior e descubra que número racional* $0,999999999\cdots$ *representa.*

Exemplo I.36. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty$ *pois vimos no Exemplo I.23 que* $s_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n} \to \infty$.

Exemplo I.37. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ *pois vimos no Exemplo I.24 que* $s_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^3} + ... + \dfrac{1}{n^2}$ *converge para* $s < 2$.

Exemplo I.38. *(Séries Telescópicas) Seja* (a_n) *sequência qualquer e definamos*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_{n+1} - a_n)$$

Neste caso $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1} - a_k)$ *isto é,*

$s_0 = a_1 - a_0,$

$s_1 = a_2 - a_1 + s_0 = a_2 - a_0,$

$s_2 = a_3 - a_2 + s_1 = a_3 - a_0,$

$\vdots$

Tudo indica que $s_n = a_{n+1} - a_0$ *o que é verificado pelo Método da indução(Exercício). Concluímos assim que*

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}(a_{n+1} - a_n) = \begin{cases} L - a_0, \ \text{se } a_n \to L \in \mathbb{R} \\ \text{diverge, se } a_n \text{ diverge.} \end{cases}}$$

Observação I.7. *Se tomarmos a somatória a partir de um certo* k_0 *e se* $a_n \to L \in \mathbb{R}$ *então*

$$\sum_{n=k_0}^{\infty}(a_{n+1} - a_n) = L - a_{k_0}$$

.

Como aplicação de Séries Telescópicas analisemos a série abaixo:

Exemplo I.39. *Seja* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Podemos decompor o termo geral da série na soma de frações parciais

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Assim se definirmos $a_n = -\dfrac{1}{n}$ *vemos que esta é uma série telescópica e como* $a_n = -\dfrac{1}{n} \to 0$ *temos que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0 - a_1 = 1$$

Antes de prosseguir com métodos de convergência ou divergência de séries vejamos os seguintes resultados.

A exemplo do que ocorre com as sequências, vejamos algumas propriedades das séries convergentes:

Proposição I.7.1. *(Propriedades das Séries Convergentes)*
Sejam as séries convergentes $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ *e* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$. *Então:*

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$.

b) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ *tem-se* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n) = \alpha a$.

Prova: *a) Basta observar que como as séries dadas convergem temos que*

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k \to a + b.$$

b) Exercício.

Observação I.8. *Note que se* a_n *está definida para* $n \geq 0$ *então para todo* $k_0 \in \mathbb{N}$ *a série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge se e somente se } \sum_{n=k_0}^{\infty} a_n \text{ converge.}$$

De fato, basta observar que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \underbrace{a_0 + a_1 + \cdots + a_{k_0-1}}_{\text{soma finita}} + \sum_{n=k_0}^{\infty} a_n$. *Mas note que neste caso os limites, caso existam, serão diferentes, a menos que a soma dos finitos termos seja* 0.

Exemplo I.40. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$ *mas* $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}-\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)=\frac{3}{2}-\frac{13}{9}=\frac{1}{18}.$

Teorema I.7.2. *(Teste do termo geral para séries convergentes)*

Se $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n=a$ *é uma série convergente então* $a_n\to 0$.

prova: *De fato, se* s_n *é a sequência das somas parciais de* a_n *então* $s_n\to a$ *bem como* $s_{n-1}\to a$ *(Por que?). Logo*

$$a_n=s_n-s_{n-1}\to a-a=0$$

como queríamos.

Vale a pena olhar este resultado de um ponto de vista prático. Veja que ele também nos diz que

Corolário I.7.3. *Se* $a_n\nrightarrow 0$ *isto é, não converge para* 0*, então* $\sum a_n$ *diverge.*

Este resultado é útil para catalogar inúmeras séries divergentes, bastando para isso que (a_n) *divirja ou* $a_n\to a\neq 0$*, como por exemplo*

$$\sum 1,\quad \sum(-1)^n,\quad \sum\frac{n^2-1}{3n^2+4n-1},\quad \sum\frac{n^3}{n+1}.$$

Construa mais três exemplos de séries divergentes.

CUIDADO: *O resultado não diz que vale a recíproca. Na realidade é* **falso** *dizer que se* $a_n\to 0$ *então* $\sum a_n$ *converge. Exemplo:*

$$\frac{1}{n}\to 0\quad mas\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$$

Exercício I.16. *Não vá dormir sem antes fazer um resumo destacando-se os conceitos fundamentais vistos nesta aula.*

I.8 Aula 7 - Critério da Integral

Nem sempre será possível verificar para onde uma série converge mas podemos contar com algumas estimativas.

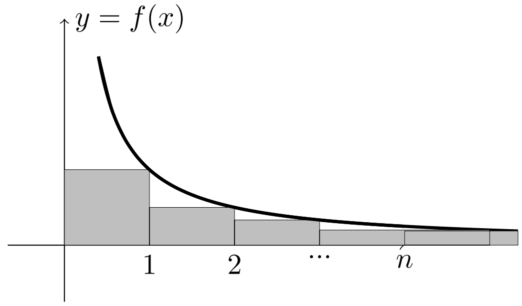
Teorema I.8.1. *(Critério da Integral) Suponha $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ função contínua, decrescente*

$$\int_0^\infty f(x)\ dx = \lim_{b \to \infty} \int_0^b f(x)\ dx = L.$$

Seja a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ onde $a_n = f(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

a) Se $L \in \mathbb{R}$ então a série converge e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq +L$.

b) Se $L = \infty$ então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.



Prova:

Como $f(x)$ é não negativa $s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=1}^{n} a_k$ é uma sequência crescente.

Mas f também é contínua e decrescente e portanto

$$0 \leq s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \int_0^n f(x)\ dx \leq L$$

Logo se $L \in \mathbb{R}$, s_n será também limitada superiormente e portanto convergirá para valor menor ou igual a L. Mas se $L = \infty$ também podemos mostrar que $s_n \geq \int_1^{n+1} f(x)dx \to \infty$ (Exercício!). Então pelo item b) do Critério do Confronto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

Exercício I.17. *Conclua que o resultado continua válido se $f : [n_0, \infty) \to [0, \infty)$ for contínua, decrescente e não negativa e $\int_{n_0}^{\infty} f(x)dx = L$, para algum $n_0 > 0$.*

Exemplo I.41. *(Séries harmônicas) Definimos a série harmônica com expoente $k > 0$ fixo, a série cujo termo geral é dado por $a_n = \dfrac{1}{n^k}$ isto é :*

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \cdots}$$

Observemos primeiramente que a função $f(x) = \dfrac{1}{x^k}$ é contínua, positiva e decrescente para $x \geq 1$ e para todo $k > 0$.

Além disso,

a) se $0 \leq k \leq 1$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^k} = \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^k} = \infty$$

b) e se $k > 1$ temos

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^k} = \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^k} = \frac{1}{k-1}.$$

Logo pelo Critério da Integral temos que:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \begin{cases} \text{converge se } k > 1 \\ \infty \text{ se } k \leq 1. \end{cases}}$$

Exemplo I.42. *Seja $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$. Temos que $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$ é função positiva e contínua para $x > 1$. Além disso $f'(x) = -\dfrac{(\ln x + 1)}{(x \ln x)^2} < 0$ para $x > 1$. Logo $f(n)$ é estritamente decrescente para $n \geq 2$. Além disso $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \infty$. Portanto*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} = \infty$$

Exercício I.18. *Estude para quais valores de $p \in \mathbb{R}$ a série abaixo converge ou diverge:*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$$

I.9 Aula 8 - Critério da Série Alternada

Definição I.9.1. *(Séries Alternadas) Seja $a_n > 0$ para $n \geq 0$. Então a série*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^n a_n \cdots$$

é dita uma série alternada.

Teorema I.9.2. *(Critério de convergência das séries alternadas ou Critério de Leibniz) Suponha (a_n) tal que*

i) $a_n > 0$,

ii) $a_n \to 0$,

iii) $a_{n+1} \leq a_n$. Então

a) Existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n = L$.

b) $|s_n - L| \leq a_{n+1}$, onde $s_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n$.

Note que este resultado não fornece o valor de L mas como $a_n \to 0$ sabemos que quanto maior for n mais próximo s_n estará de L.

Note ainda que se a_n não converge para 0 então $(-1)^n a_n$ também não tende a 0 e consequentemente $\sum(-1)^n a_n$ diverge.

Prova do Teorema I.9.2:

a) Seja $s_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n$. Vamos trabalhar com as subsequências (s_{2n}) e (s_{2n-1}) para concluir que (s_n) converge.

$s_{2n} = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^{2n} a_{2n} = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_{2n}$. Lembrando que a_n é decrescente temos

$$s_{2n} = \underbrace{(a_0 - a_1)}_{\geq 0} + \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\geq 0} + \cdots \underbrace{(a_{2n-2} - a_{2n-1})}_{\geq 0} + \underbrace{a_{2n}}_{\geq 0} \geq 0$$

Por outro lado

$$s_{2n+2} = s_{2n} \underbrace{-a_{2n+1} + a_{2n+2}}_{\leq 0} \leq s_{2n}.$$

Assim s_{2n} é sequência decrescente e limitada inferiormente e portanto existe L_1 tal que

$$s_{2n} \to L_1.$$

De modo análogo construímos a subsequência s_{2n+1} e concluímos que ela é crescente e limitada superiormente por a_0. Logo existe L_2 tal que

$$s_{2n+1} \to L_2.$$

Assim por um lado $s_{2n} - s_{2n+1} \to L_1 - L_2$. Mas por outro lado $s_{2n} - s_{2n+1} = a_{2n+1} \to 0$. Logo $L_1 = L_2 = L$ e consequentemente

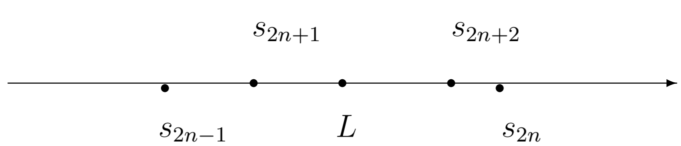
$$s_{2n} \to L \quad \textit{bem como} \quad s_{2n+1} \to L$$

Pelo Teorema I.4.3 $s_n \to L$ isto é,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = L.$$

b) Como $s_n \to L$, s_{2n} é decrescente e s_{2n-1} é crescente, temos que

$$L \leq s_{2n} \quad \textit{bem como} \quad s_{2n+1} \leq L$$



assim como a_n é decrescente temos

$$0 \geq L - s_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k = -a_{n+1} + [\ \textit{resto} \geq 0\ ] \geq -a_{n+1},\ \textit{se } n \textit{ par e}$$
$$0 \leq L - s_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k = a_{n+1} + [\ \textit{resto} \leq 0\ ] \leq a_{n+1},\ \textit{se } n \textit{ ímpar.}$$

Logo para todo n temos

$$|L - s_n| \leq a_{n+1}.$$

Isto é, $s_n = a_0 - a_1 + \cdots (-1)^n a_n$ é um valor aproximado para L com erro inferior a a_{n+1}.

Exemplo I.43.

- *Seja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Assim $0 < a_n = \dfrac{1}{n} \to 0$ e é decrescente isto é, $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$. Logo pelo Critério de Leibniz a série alternada converge. Procuremos um valor aproximado para* *seu limite L, com erro menor que $0,2$. Para isso basta buscar um índice n_0 tal que $a_{n_0+1} < 0,2$ e o valor procurado será s_{n_0}. Mas $a_6 = \dfrac{1}{6} < 0,2$ logo $|s_5 - L| \leq a_6 < 0,2$ Portanto $L \approx -1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{5} = -\dfrac{47}{60}$.*

- *Seja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$. Assim $0 < a_n = \dfrac{\ln n}{n}$ para $n > 1$. Além disso usando a regra de L'Hospital temos $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Mas $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right) = \dfrac{1-\ln x}{x^2} < 0$ para $x > e$. Logo $f(n) = a_n = \dfrac{\ln n}{n}$ é estritamente decrescente para $n \geq 3$. Logo pelo Critério de Leibniz a série alternada converge.*

  Exercício: Determine aproximação para seu limite com erro inferior a $0,5$.

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$. *Esta série diverge pois*

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e \neq 0$$

e consequentemente $(-1)^n \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$ não converge para 0.

I.10 Aula 9 -Critério da Comparação e Comparação por Limite

O próximo critério apenas aponta se uma série converge(sem dizer para qual valor) ou se diverge para o infinito.

Teorema I.10.1. *(Critério da comparação) Sejam as sequências a_n, b_n tais que para $n \geq n_0$ satisfaçam $0 \leq a_n \leq b_n$.*

a) Se $\sum b_n$ converge então $\sum a_n$ converge.

b) Se $\sum a_n = \infty$ então $\sum b_n = \infty$.

Prova: *Por simplicidade, suponhamos $n_0 = 0$. Sejam s_n^a e s_n^b as sequências das somas parciais de a_n, b_n respectivamente. Observe que ambas são estritamente crescentes. Além disso pela hipótese $0 \leq s_n^a \leq s_n^b$.*

a) Como $\sum b_n$ converge então s_n^b é convergente e portanto limitada. Logo pela hipótese s_n^a também o será e portanto $\sum a_n$ converge.

b) Como $\sum a_n$ diverge temos que $s_n^a \to \infty$ já que é crescente. Logo pelo Teorema do Confronto, $\sum b_n = \infty$ e portanto diverge.

Exemplo I.44.

- $\sum \dfrac{1}{n^2+3n+1}$ *converge pois pode ser comparada com a série harmônica convergente* $\sum \dfrac{1}{n^2}$ *já que* $0 \leq \dfrac{1}{n^2+3n+1} \leq \dfrac{1}{n^2}$ *para todo* $n \geq 0$.

- $\sum \dfrac{(sen\ n^5)^2}{n^4}$ *converge pois pode ser comparada com a série harmônica convergente* $\sum \dfrac{1}{n^4}$ *já que* $0 \leq \dfrac{(sen\ n^5)^2}{n^4} \leq \dfrac{1}{n^4}$

- $\sum \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n^2}$ *diverge pois pode ser comparada com a série harmônica divergente* $\sum \dfrac{1}{n}$. *De fato* $0 \leq \dfrac{1}{n} = \dfrac{n}{n^2} < \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n^2}$

Mas este critério pode ser aperfeiçoado já que não consegue decidir sobre séries como $\sum \dfrac{n-1}{n^2}$ *embora esta pareça ter comportamento muito próximo de* $\sum \dfrac{1}{n}$. *Para isso precisamos do*

Teorema I.10.2. *(Critério da comparação por limite) Sejam as sequências não negativas a_n e b_n tais que*

$$\frac{a_n}{b_n} \to L.$$

a) Se $L > 0$ então ou ambas $\sum a_n$ e $\sum b_n$ convergem ou ambas divergem.

b) Se $L = 0$ e se $\sum b_n$ converge então $\sum a_n$ converge.

c) Se $L = \infty$ e se $\sum b_n$ diverge então $\sum a_n$ diverge.

Observação I.9. *Uma dica é que colocaremos no numerador o termo geral da série que queremos conhecer e no denominador o que já conhecemos.*

Prova:

a) Se $L > 0$ dado $\varepsilon = \frac{L}{2}$ existe n_0 tal que para $n > n_0$ temos $|\frac{a_n}{b_n} - L| < \frac{L}{2}$ isto é, $\frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3L}{2}$ e portanto

$$\text{para } n > n_0 \text{ temos } 0 \leq \frac{Lb_n}{2} < a_n < \frac{3Lb_n}{2}.$$

Logo, pelo Critério da Comparação , se $\sum a_n$ converge então $\frac{L}{2}\sum b_n$, e consequentemente $\sum b_n$, converge. Analogamente se $\sum b_n$ converge então $\frac{3L}{2}\sum b_n$ converge e consequentemente, do Teorema da Comparação $\sum a_n$ também converge.

Por outro lado se $\sum b_n$ diverge então $\frac{Lb_n}{2}$ diverge e pelo Critério da comparação $\sum a_n$ diverge. Analogamente, se $\sum a_n$ diverge então $\sum b_n$ diverge.

b) Exercício.

c) Se $L = \infty$ dado $M = 1$ existe n_0 tal que para $n > n_0$ temos $\frac{a_n}{b_n} > 1$. Logo para $n > n_0$ temos $a_n > b_n$. Consequentemente se $\sum b_n = \infty$ então, pelo Critério da Comparação, temos $\sum a_n = \infty$.

Exemplo I.45.

- $\sum \frac{1}{\sqrt[4]{n^9 - 2n^2 - 1}}$

  Poderíamos pensar em comparar $\frac{1}{\sqrt[4]{n^9 - 2n^2 - 1}}$ com $b_n = \frac{1}{\sqrt[4]{n^9}}$ já que para n muito grande (1 bilhão, 1 trilhão) os denominadores serão muito próximos. Mas o Teorema *da Comparação não se aplica neste caso já que* $0 \leq b_n \leq a_n$. *Mas usando o* **Teorema da Comparação por Limite** *vemos que*

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt[4]{n^9 - 2n^2 - 1}}}{\frac{1}{\sqrt[4]{n^9}}} = \sqrt[4]{\frac{n^9}{n^9 - 2n^2 - 1}} = \sqrt[4]{\frac{1}{1 - 2\frac{1}{n^7} - \frac{1}{n^9}}} \to 1 = L > 0.$$

Logo como $\sum \frac{1}{\sqrt[4]{n^9}}$ *é convergente, já que é série harmônica com* $k = \frac{9}{4} > 1$ *então* $\sum \frac{1}{\sqrt[4]{n^9 - 2n^2 - 1}}$ *converge.*

- $\sum \frac{\ln n}{n^2}$. *Vamos comparar* $a_n = \frac{\ln n}{n^2}$ *com* $b_n = \frac{1}{n^2}$.

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{\ln n}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \ln n \to \infty$$

Como $\sum \frac{1}{n^2}$ *é convergente não é possível aplicar o critério, isto é, estas séries não são comparáveis! Vamos tentar comparar com outra série harmônica convergente. Lembrando do fato de que* $\frac{\ln n}{n^k} \to 0$ *para todo* $k > 0$, *tomemos* $b_n = \frac{1}{n^{1.5}}$. *Neste caso*

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{\ln n}{n^2}}{\frac{1}{n^{1.5}}} = \frac{\ln n}{n^{0.5}} \overbrace{\longrightarrow}^{L'Hospital} \frac{\frac{1}{n}}{0.5n^{-0.5}} = \frac{1}{0.5n^{0.5}} \to 0$$

Logo pelo item b) do teorema $\sum \frac{\ln n}{n^2}$ *converge.*

Exercício I.19. *Use a técnica do exemplo anterior para concluir que a série*

$$\sum \frac{\ln n}{n^p} \quad \begin{cases} \text{converge se } p > 1, \\ \text{diverge se } p \leq 1. \end{cases}$$

Exercício I.20. *Não vá dormir sem antes fazer um resumo destacando-se os conceitos fundamentais vistos nesta aula.*

I.11 Aula 10: Séries absolutamente convergentes, Critérios da razão e da raiz

Como vimos, uma série nem sempre consiste de termos positivos, mas também nem sempre será uma série alternada. O próximo resultado será particularmente interessante para tratar de séries cujo termo geral não tem o mesmo sinal para todo n.

Teorema I.11.1. *Se $\sum_0^{\infty} |a_n|$ converge então $\sum_0^{\infty} a_n$ também converge.*

Prova: *De fato, observe que*

$$\pm a_n \leq |a_n|$$

Logo

$$0 \leq |a_n| - a_n \leq 2|a_n|$$

Mas $\sum_{n=0}^{\infty} 2|a_n| = 2\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge, logo pelo Critério da Comparação a série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| - a_n$ também converge. Como

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n - |a_n| + |a_n|) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| - \sum_{n=0}^{\infty}(|a_n| - a_n)$$

é diferença de séries convergentes então também será convergente.

Definição I.11.2. *Seja $a_n \in \mathbb{R}$. Se $\sum |a_n|$ convergir dizemos que $\sum a_n$ é absolutamente convergente.*

CUIDADO! *Toda série absolutamente convergente é convergente MAS não é verdade que toda série convergente é absolutamente convergente. Basta voltarmos as séries harmônicas. Vimos que $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ é uma série alternada convergente porém $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n \frac{1}{n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge. Com base nestes fatos temos a seguinte classificação:*

Definição I.11.3. *Uma série $\sum a_n$ será:*

a) Absolutamente convergente se $\sum |a_n|$ convergir.

b) Condicionalmente convergente se ela converge mas $\sum |a_n|$ divergir.

c) Divergente se ela divergir.

Exemplo I.46. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^k}$ *é série absolutamente convergente para* $k > 1$. *De fato, esta série é absolutamente convergente pois* $\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^n\frac{1}{n^k}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$ *que é uma série harmônica com expoente* $k > 1$ *e portanto convergente. Veja que neste caso não foi necessário testar todas as hipóteses do Critério de de Leibniz (para séries alternadas).*

Exemplo I.47. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^k}$ *é série condicionalmente convergente para* $0 < k \leq 1$ *pois neste caso podemos aplicar o Critério de Leibniz para concluir que ela converge. Mas não converge absolutamente, já que a série resultante será harmônica com* $k < 1$.

Exemplo I.48. $\sum(-1)^n$ *é série divergente.*

Exemplo I.49. $\sum\frac{cos(n^3-3n^2+2)}{n^4}$ *converge absolutamente pois*

$$|\frac{cos(n^3-3n^2+2)}{n^4}| \leq \frac{1}{n^4}$$

e $\sum\frac{1}{n^4}$ *é harmônica com* $k = 4$. *Logo pelo Critério da comparação a série dada converge absolutamente.*

O próximo resultado é uma aperfeiçoamento do Teste da Razão para convergência de sequências que vimos no Teorema I.5.1

Teorema I.11.4. *(Teste da Razão para Séries) Seja* $a_n \neq 0$ *tal que*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to L.$$

a) Se $0 \leq L < 1$ *então* $\sum a_n$ *converge absolutamente.*

b) Se $L > 1$ *ou* $L = \infty$ *então* $\sum a_n$ *diverge. No caso de* $a_n > 0$ *então* $\sum a_n = \infty$.

c) Se $L = 1$ *nada se conclui.*

Prova: *Voltando a prova do Teorema I.5.1 temos que existem índice* n_0 *e constantes* $r > 0$ *e* $M = |a_{n_0}|r^{-n_0}$ *tais que*

a) se $0 \leq L < 1$ *então* $0 \leq r < 1$ *e*

$$|a_n| < Mr^n \quad para\ n > n_0.$$

Logo $\sum r^n$ *é série geométrica convergente pelo Critério da Comparação temos que* $\sum a_n$ *converge absolutamente.*

b) Mas se $L > 1$ *então* $r > 1$ *e*

$$|a_n| > Mr^n \quad para\ n > n_0.$$

Como $r > 1$ *temos que* $r^n \to \infty$ *logo* a_n *é sequência não limitada e portanto divergente. Logo* $\sum a_n$ *diverge. Em particular se* $a_n \geq 0$ *então* $\sum a_n = \infty$. *O caso* $L = \infty$ *fica como exercício.*

Observação I.10. *O caso* $L = 1$ *não é conclusivo como mostra os exemplos abaixo. De fato, se tomarmos as séries harmônicas* $\sum \frac{1}{n}$ *e* $\frac{1}{n^2}$ *sabemos que a primeira diverge e a segunda converge. Mas aplicando-se o Teste da razão ambas nos conduzem a* $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to 1.$

Observação I.11. *Este teste é particularmente útil para séries cujo termo geral envolve muitos produtos.*

Exemplo I.50.

- $\sum \frac{(-1)^{n+1}3^n}{n!}$. *Aplicando o teste da razão temos*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{(-1)^n 3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|(-1)^n 3^n|}{n!}}\right| = \frac{3}{n+1} \to 0 < 1.$$

  Logo a série dada converge absolutamente.

- $\sum \frac{(-1)^n n^n}{(n)!}$.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^{n+1} n!}{(n+1)! n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \to e > 1.$$

  Logo a série dada diverge.

Exercício I.21. *Verifique se* $\sum \frac{(2n)!}{(n+1)^{2n}}$ *converge.*

Um resultado similar ao Teste da razão é o Teste da raiz, que também se aplica em séries cujo termo geral envolve muitos produtos, mais especificamente, potências.

Teorema I.11.5. *(Critério da Raiz) Seja a_n tal que*

$$\sqrt[n]{|a_n|} \to L.$$

a) Se $0 \leq L < 1$ então $\sum a_n$ converge absolutamente.

b) Se $L > 1$ ou $L = \infty$ então $\sum a_n$ diverge. No caso de $a_n > 0$ então $\sum a_n = \infty$.

c) Se $L = 1$ nada se conclui.

Prova: *Por ser similar a demonstração do Critério da Razão deixaremos como exercício.*

Exemplo I.51.

- *A série $\sum (-1)^n \left(\frac{2n}{n+1}\right)^n$ diverge pois*

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(\frac{2n}{n+1}^n\right) \to 2 > 1.$$

- *A série $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{n-1}{5n+13}\right)^{2n}$ converge pois*

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n}\left(\frac{n-1}{5n+13}\right)^2 \to \frac{1}{25} < 1$$

- *Se $L = 1$ nada se conclui. Por exemplo, sabemos que $\sum n^2$ e $\sum \frac{1}{n^2}$ são séries divergente e convergente, respectivamente. Mas*

$$\sqrt[n]{n^2} = (\sqrt[n]{n})^2 \to 1 \quad \textit{bem como} \quad \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \to 1$$

Exercício I.22. *Não vá dormir sem antes fazer um resumo destacando-se os conceitos fundamentais vistos nesta aula.*

I.12 Lista 2 de Exercícios - Séries Numéricas.

1. *Enumere todos os testes para verificação de convergência e de divergência de séries.*

2. *Determine o valor de* $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}$ *e de* $\sum_{n=7}^{\infty} 2^{-n}$.

3. *Mostre que as desigualdades abaixo estão satisfeitas a partir de algum natural* N_0*, isto é, mostre que existe um natural* N_0 *tal que, para todo* $n \geq N_0$ *as desigualdades abaixo estão satisfeitas:*

$$a)\ \ln(n) \leq n \quad b)\ \ln(n) \leq \sqrt{n} \quad c)\ n^2 \leq 2^n \quad d)\ \sqrt{n} \leq n$$

4. *Verifique quando as séries geométricas abaixo convergem ou divergem. E se convergirem qual o valor de sua soma.*
   a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$ *c)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n}$ *d)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^{2n}}$ *e)* $\displaystyle\sum_{n=3}^{4} 3(0,999999)^n$ *f)* $\displaystyle\sum_{n=10^6}^{\infty} 10^{-100}(6/5)^n$.

5. *Observando-se que as séries abaixo são geométricas verifique em qual intervalo da reta elas convergem e neste caso para qual função de* x *cada uma converge.*
   a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ *c)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (x+1)^n$ *d)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n}$.

6. *a) Seja* $0,66666666.....$ *Podemos escrever tal número como*

$$6 \cdot 0,11111111..... = 6\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots\right) = \frac{6}{10}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n}.$$

   Assim usando as propriedades da série geométrica verifique como representar $0,66666666....$ *na forma de fração, ou melhor, de um número racional.*

7. *Repita o exercício anterior para*

   a) $1,13555555...$ *b)* $0,15151515...$ *c)* $1,013013013......$

8. *Mostre que as séries abaixo são as mesmas:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} = \sum_{n=-2}^{\infty} \frac{n+3}{n^2+6n+10}$$

9. *Verifique o valor para o qual as séries abaixo convergem indicando o critério usado:*

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{2}{2k+1})(\frac{1}{2k+3})$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{ln(n+2)}-\frac{1}{ln(n+1)}$ *c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{40n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$

d) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ *e)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4k+1)(4k+5)}$ *f)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ *g)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$

10. *Construa séries telescópicas de modo que sua correspondente sequência de somas parciais(ou reduzidas)* S_n*, seja dada pelas expressões abaixo:*

$$a)\ S_n=\frac{4n}{n+1}\quad b)\ S_n=\frac{2n}{3n+1}\quad c)\ S_n=\frac{n^2}{n+1}\quad d)\ S_n=2^{n+1}-1$$

11. *Use fatos conhecidos para construir:*

a) Uma série de termos não negativos que convirja para $s=7$.

b) Construa uma série telescópica que convirja para $s=7$.

12. *i) Use o teste da integral para verificar se as séries abaixo convergem ou divergem:*

$$a)\sum_{n=1}\frac{(\ln n)^p}{n}\quad b)\sum_{n=1}\frac{1}{n\sqrt{n}}\quad c)\sum_{n=1}\frac{e^n}{1+e^{2n}}\quad d)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p},\ p\in\mathbb{R}\ \textit{fixo.}$$

13. *Decida se as séries abaixo convergem ou divergem indicando o critério usado:*

$a)\sum 1/n^n$ $\quad b)\sum(\frac{n}{n+1})^n$ $\quad c)\sum\frac{n+1}{n(n-1)}$ $\quad d)\sum\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

$e)\sum\frac{1}{\sqrt{n^2(n+1)}}$ $\quad f)\sum\frac{3}{n^2+1}$ $\quad g)\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ $\quad h)\sum 1/(10^n)$

$i)\sum\frac{n^2+3n-7}{n^3-2n+5}$ $\quad j)\sum\frac{3+\cos n}{n^2}$ $\quad k)\sum\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ $\quad l)\sum\frac{n^{1/n}}{n}$

14. *Analise se as séries abaixo convergem ou não indicando o teste usado:*

$a)\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{arctgn}{n^{1.1}}$ $\quad b)\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ $\quad c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n}$ $\quad d)\displaystyle\sum_{n=1}\frac{n!}{n^n}$

$e)\displaystyle\sum_{n=1}\frac{(n!)^3}{(2n)!}$ $\quad f)\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+2)!}{3^n(n!)^2}$ $\quad g)\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n^{1/n}-1)^n$ $\quad h)\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}(\frac{2n-1}{n+13})^n$

$i)\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}e^{2n}(\frac{n}{n+1})^{n^2}$ $\quad j)\displaystyle\sum\frac{ln\, n}{n^3}$ $\quad k)\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^2}{n^3}$ $\quad l)\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^2}{n^{1/2}}$

$m)\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{n!}$ $\quad n)\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)!}{3!n!3^n}$ $\quad o)\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)^n}{(n+1)^n}$ $\quad p)\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^n}$

15. *a) Verifique se as séries abaixo convergem:*

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}} \qquad b)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{n}{10})^n \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$$
$$d)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ln(1+\frac{1}{n}) \quad e)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1} \quad f)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+2}[\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}].$$

b) Das séries convergentes acima determine um valor aproximado para as mesmas com erro inferior à $0,01$.

16. *Classifique cada uma das séries abaixo em* **(D) divergente** *ou* **(CD) condicionalmente convergente** *ou* **(AC) absolutamente convergente***:*

$a)(\ )\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+10}}$ $\quad b)(\ )\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n+\sqrt{n}}$ $\quad c)(\ )\sum(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n!}$

$d)(\ )\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{3^{1/n}}$ $\quad e)(\ )\sum(-1)^{n+1}\frac{n^3}{1+n^5}$ $\quad f)(\ )\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{ln(n+2)}$

$g)(\ )\sum(-1)^{n+1}\frac{ln\, n}{\sqrt{n}}$ $\quad h)(\ )\sum(-1)^{n+1}sen\, n\pi$ $\quad i)(\ )\sum(-1)^{n+1}\frac{(sen\, n)^2}{n^2}$

$j)(\ )\sum(-1)^{n+1}\frac{(sen\, n)^2}{n^{9/2}}$ $\quad k)(\ )\sum(-1)^{n+1}\frac{n2^n(n+1)!}{3^n n!}$ $\quad l)(\ )\sum(-1)^{n+1}\frac{n^4 3^n}{n!}$

$m)(\ )\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ $\quad n)(\ )\sum(-1)^{n+1}[\sqrt{n^2+n}-n]$ $\quad o)(\ )\sum\frac{\cos n\pi}{n\sqrt{n}}$

$p)(\ )\sum(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n-\ln n}$

17. *Verificar se as séries* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$*, com as* a_n *dadas abaixo, são divergentes, condicionalmente convergentes ou absolutamente convergentes. (Observe que neste exercício não é possível aplicar o Critério da série alternada). Sugestão: pense na sequência das reduzidas.*

$$a)\ a_{2n-1}=\frac{1}{\sqrt{n+1}-1}\ e\ a_{2n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+1} \qquad b)\ a_{2n-1}=\frac{1}{2^{n-1}}\ e\ a_{2n}=\frac{1}{3^{2n-1}}$$

$$c)\ a_{2n-1}=\frac{1}{2n-1}\ e\ a_{2n}=\frac{1}{3^n} \qquad d)\ a_{2n-1}=\frac{1}{4n-1}\ e\ a_{2n}=\frac{1}{4n+3}$$

18. *Encontre os valores de* a *para os quais* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{n+2}-\frac{1}{n+4}\right)$ *converge.*

19. *Mostre que se* $a_n>0$ *e* $\sum a_n$ *é convergente então* $\sum a_n^2$ *também é convergente.*

20. *Dê exemplo de uma série* $\sum a_n$ *que seja convergente mas que* $\sum a_n^2$ *divirja.*

21. *Sejam* $0<a<b<1$*. Mostre que a série* $a+b+a^2+b^2+a^3+b^3+\cdots$ *é convergente.*

22. *Mostre que se* $\sum a_n^2$ *e* $\sum b_n^2$ *convergem então* $\sum a_n b_n$ *é absolutamente convergente. Sugestão:* $(a \pm b)^2 \geq 0$.

23. *Suponha que* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *seja uma série convergente de termos não negativos. Com base neste fato, responda:*

    a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ *converge ou diverge? Justifique.*

    b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{na_n}{n^2+1}$ *converge ou diverge? Justifique.*

    c) $d \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(a_n)^2+1}$ *converge ou diverge? Justifique.*

24. *Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Exiba exemplos quando forem falsas:*

    (a) *Toda série alternada é condicionalmente convergente.*

    (b) *Toda série absolutamente convergente é convergente.*

    (c) *Toda série convergente é absolutamente convergente.*

    (d) *Toda série alternada converge.*

    (e) *Se* $\sum a_n$ *e* $\sum b_n$ *divergem então* $\sum \alpha(a_n) + \sum \beta(b_n)$ *diverge para todo* $\alpha, \beta \in R$.

    (f) *Se* $\sum |a_n|$ *diverge então* $\sum a_n$ *é condicionalmnente convergente.*

    g) *Se* $a_n \to 1$ *então* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge.*

    h) *Se* $a_n \to 0$ *então* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge.*

    i) *Se* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge então* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ *diverge.*

25. *Use o critério da razão para determinar todos os valores de* x *para os quais as séries abaixo sejam convergentes e os valores para os quais elas são divergentes.*

    a) $\sum \frac{x^n}{n^2}$ b) $\sum \frac{n!x^n}{n^n}$ c) $\sum e^{nx}$

    d) $\sum 2^n x^n$ e) $\sum x^n sen\frac{1}{n}$ f) $\sum (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

Capítulo II

Séries de Potências

II.1 Aula 11 - Séries de Potências e Raio de convergência

Falaremos agora de um tipo específico de séries de funções, as chamadas séries de potências. Veremos que este tipo de série, quando convergente num intervalo, descreverá funções infinitamente deriváveis e o cálculo de suas derivadas ou integral, será realizado como se elas fossem polinômios.

Definição II.1.1. *Seja (a_n) uma sequência de números reais e x_0 real fixo. Então*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

será denominada uma série de potências de $(x-x_0)$ ou série de potências centrada em x_0.

Note que se tomarmos $x = x_0$ esta série sempre converge, já que com excessão de sua primeira parcela as demais serão nulas. A questão que se coloca é se ela converge para outros valores de x. Caso ela convirja num intervalo ela irá representar uma função. Vejamos um caso específico:

Exemplo II.1. *Considermos a série de potências centrada em $x_0 = 0$*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

onde $a_n = 1$ para todo $n \geq 0$. Esta é uma série geométrica de razão x, logo sabemos que converge para todo x desde que $|x| < 1$ e neste caso temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Assim esta série de potências de x representa a função $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ no intervalo $]-1,1[$. É óbvio que $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ está definida para todo $x \neq 1$. Mas no intervalo $]-1,1[$ ela também é descrita através da série geométrica.

Exemplo II.2. *Consideremos a série de potências centrada em $x_0 = 1$ e $a_n = \dfrac{1}{n!}$*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!} = 1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + \cdots .$$

Denominando-se $b_n(x) = \dfrac{(x-1)^n}{n!}$ e aplicando-se o Critério da razão, para $x \neq 1$, temos que

$$\left|\frac{b_{n+1}(x)}{b_n(x)}\right| = \left|\frac{(x-1)}{n+1}\right| \to 0, \text{ qualquer que seja } x.$$

Portanto esta série descreve uma função $f(x)$ definida para todo $x \in \mathbb{R}$. Ainda não sabemos se $f(x)$ é alguma função conhecida. Mas isso será desvendado adiante.

Exemplo II.3. *Consideremos agora a série centrada em $x_0 = 0$ dada por*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n.$$

Aplicando-se o Critério da raiz vemos que $\sqrt[n]{|n^n x^n|} = n|x| \to \begin{cases} 0 < 1 \text{ se } x = 0 \\ \infty \text{ se } x \neq 0 \end{cases}$

Logo esta série só converge se $x = 0$ e portanto, não representa uma função.

Veremos que estes três tipos de comportamentos serão os únicos obtidos para uma série de potências centrada em x_0, isto é, vale uma das alternativas abaixo

- *converge para todo $x \in \mathbb{R}$,*
- *converge num intervalo centrado em x_0,*
- *só converge em x_0.*

Mas antes de prosseguir nossas investigações, primeiramente observemos que

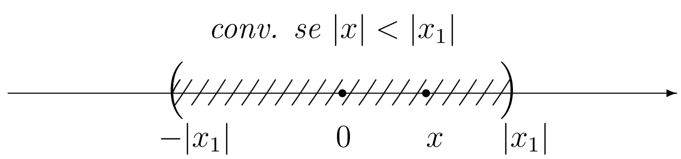
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \underbrace{(x - x_0)}_{y}^{n} \text{ converge para } a < x < b$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n \text{ converge para } a - x_0 < y < b - x_0.$$

Logo conhecendo-se o comportamento de séries centradas em $x_0 = 0$ conhecemos o comportamento de séries correspondentes centradas em qualquer valor x_0. Assim, de agora em diante, trabalharemos com séries centradas em $x_0 = 0$.

Teorema II.1.2. *Seja a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Suponhamos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ convirja para algum $x_1 \neq 0$. Então a série converge* **absolutamente** *para todo $x \in]-|x_1|, |x_1|[$ isto é, se $|x| < |x_1|$.*



Prova: *De fato*

$$|a_n x^n| = \left| a_n x_1^n \cdot \left(\frac{x}{x_1} \right)^n \right|.$$

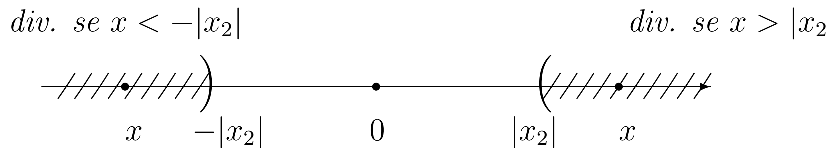
Mas $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ converge logo $a_n x_1^n \to 0$ e consequentemente existe índice n_0 tal que para $n > n_0$ tem-se $|a_n x_1^n| < 1$. Logo temos que para todo $n > n_0$

$$|a_n x^n| < \left| \frac{x}{x_1} \right|^n$$

e portanto, segue do Critério da Comparação que para todo $|x| < |x_1|$, a série de potências dada converge para todo $x \in]-|x_1|, |x_1|[$, como queríamos.

Corolário II.1.3. *Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_2^n$ diverge então $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ diverge para todo $x \in (-\infty, -|x_2|[\ \cup \ ]|x_2|, \infty)$ isto é, para $|x| > |x_2|$.*

Prova: *Exercício*



Note que este fato não é verdadeiro para qualquer série de funções. Por exemplo a série $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{nx}$ *converge para* $x = -1$ *mas diverge para* $x \in [0, 1[\subset] - 1, 1[$.

Teorema II.1.4. *Seja* $\sum a_n x^n$. *Então temos uma das alternativas abaixo:*

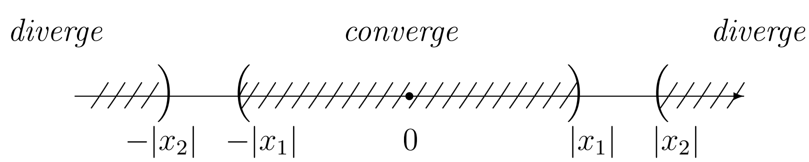
a) $\sum a_n x^n$ *converge somente se* $x = 0$.

b) $\sum a_n x^n$ *converge para todo* $x \in \mathbb{R}$.

c) Existe $R > 0$ *tal que* $\sum a_n x^n$ *converge absolutamente para todo* $x \in] - R, R[$ *e diverge se* $|x| > R$.

Observação II.1. *Para* $x = |R|$ *precisamos analisar cada série especificamente.*

Prova: *O exemplo II.3 mostra que a) pode ocorrer e o exemplo II.2 mostra que b) pode ocorrer. Suponhamos que nem a) nem b) ocorram. Então existem* $x_1, x_2 \neq 0$ *tais que* $\sum a_n x_1^n$ *converge e* $\sum a_n x_2^n$ *diverge. Pelo Teorema II.1.2 e seu corolário concluímos que* $|x_1| \leq |x_2|$*(Por que?). Assim se* $|x_1| = |x_2| = R$ *o resultado está demonstrado. Suponhamos então* $|x_1| < |x_2|$



Definamos o conjunto $C = \{r > 0;\ \sum |a_n x^n| \text{ converge se } |x| < r\}$. *Afirmações:*

- *Pelo Teorema II.1.2 temos* $r = |x_1| \in C$ *e portanto* $C \neq \emptyset$.

- C *é limitado superiormente e* $|x_2|$ *é cota superior para* C. *Caso contrário, existiria* $r_0 \in C$ *tal que* $r_0 > |x_2|$, *e da definição de* C *concluiríamos que* $\sum |a_n x_2^n|$ *converge, o que é um absurdo.*

Assim C é um conjunto não vazio limitado superiormente, logo tem supremo, isto é, um número que é a menor das suas cotas superiores. Seja $R = supC$. Mostremos que este é o R procurado.

Afirmação 1: *Se $|x| < R$ então $\sum |a_n x^n|$ converge.*

De fato, se $|x| < R$ então $|x|$ não é cota superior de C e portanto existe $r_0 \in C$ tal que $|x| < r_0 \leq R$ e pela definição de C temos que $\sum |a_n x^n|$ converge.

Afirmação 2: *Se $|x| > R$ então $\sum a_n x^n$ diverge.*

De fato, caso $\sum a_n x^n$ convergisse, pelo Teorema II.1.2, para todo x_0 tal que $|x_0| < |x|$ teríamos que $\sum |a_n x_0^n|$ seria convergente, o que implicaria em $|x| \in C$ e portanto R não seria supremo de C, o que é uma contradição.

Como R satisfaz as afirmações 1 e 2, este é o R procurado.

Observação II.2. *Nos resultados anteriores, se trocarmos x por $x - x_0$, qualquer que seja x_0 fixo, temos que dada a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ vale uma das possibilidades abaixo:*

a) A série converge somente se $x = x_0$.

b) A série converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

c) Existe $R > 0$ tal que a série converge absolutamente se $|x - x_0| < R$ e diverge se $|x - x_0| > R$.

Definição II.1.5. *a) Se $\sum a_n(x - x_0)^n$ converge para todo $x \in \mathbb{R}$ dizemos que $R = \infty$ é seu raio de convergência.*

b) Se $\sum a_n(x - x_0)^n$ converge somente para $x = x_0$ dizemos que $R = 0$ é seu raio de convergência.

c) E se existe $R > 0$ tal que $\sum a_n(x - x_0)^n$ converge absolutamente para todo $x \in]x_0 - R, x_0 + R[$ e diverge se $|x - x_0| > R$, dizemos que R é seu raio de convergência.

Exemplo II.4. *Vimos que a série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge absolutamente para $|x| < 1$ e diverge para $|x| > 1$ logo $R = 1$ é seu raio de convergência.*

Exemplo II.5. $\sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n$ *é uma série geométrica. Logo sabemos convergir absolutamente se $|3x| = 3|x| < 1$ e divergir se $3|x| > 1$. Logo $R = \dfrac{1}{3}$ é seu raio de convergência.*

Como proceder para determinar o raio de convergência R de uma série não geométrica?

II.2 Aula 12 - Determinando o raio de convergência de uma série de potências

Com base nos resultados de convergência de séries numéricas vamos estabelecer alguns critérios para se determinar o raio de convergência de uma série de potências.

Teorema II.2.1. *(Critério inverso da razão) Seja a série $\sum a_n x^n$ e suponha que*

$$\frac{1}{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \to R.$$

então R é seu raio de convergência.

Prova: *De fato, aplicando-se o Critério da Razão para a série $\sum a_n x^n$, para $x \neq 0$, temos que*

- *se $R > 0$ então*
$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \frac{|x|}{R}.$$
Assim se $\frac{|x|}{R} < 1$, isto é $|x| < R$, a série converge absolutamente e se $\frac{|x|}{R} > 1$, isto é $|x| > R$, ela diverge. Portanto R é seu raio de convergência.

- *se $R = \infty$ então*
$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to 0 < 1.$$
Logo a série convergirá para todo $x \in \mathbb{R}$ e portanto $R = \infty$ será seu raio de convergência.

- *se $R = 0$ então a série convergirá somente se $x = 0$ e portanto $R = 0$ é seu raio de convergência.*

De modo inteiramente análogo demonstra-se que

Teorema II.2.2. *(Critério inverso da raiz) Seja a série $\sum a_n x^n$ tal que*

$$\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \to R.$$

Então R é seu raio de convergência.

Antes de ver exemplos vejamos a seguinte definição:

Definição II.2.3. *Seja $\sum a_n x^n$. Denominamos o seu intervalo de convergência como sendo o maior intervalo $I \subset \mathbb{R}$ para o qual $\sum a_n x^n$ converge.*

Observação II.3. *Veja que no caso da série ter raio de convergência $R > 0$, o intervalo de convergência pode ser de qualquer das formas abaixo:*

$$(-R, R), \quad [-R, R), \quad (-R, R], \quad [-R, R].$$

Observação II.4. *Veja que no caso de $R > 0$ ou $R = \infty$, o intervalo de convergência da série é o domínio da função que ela representa.*

Exemplo II.6.

- *Já vimos que $\sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n$ tem raio de convergência $R = \frac{1}{3}$ e que seu intervalo de convergência é $]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[$, intervalo aberto.*

  Neste caso sabemos que $\sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n = \frac{1}{1-3x}$ para $]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[$.

- *Seja $\sum \frac{x^n}{n!}$. Aplicando-se o Critério inverso da razão para $a_n = \frac{1}{n!}$ temos:*

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \left|\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}\right| = \frac{(n+1)!}{n!} = n + 1 \to \infty.$$

  Logo o raio de convergência desta série é $R = \infty$ e seu intervalo de convergência é $I = \mathbb{R}$, isto é, a reta toda.

- *Seja $\sum \frac{(-1)^n x^n}{n}$. Aplicando-se o Critério inverso da razão para $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ temos*

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \left|\frac{-n}{n+1}\right| = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \to 1.$$

  Logo $R = 1$ é seu raio de convergência. Para encontrar seu intervalo de convergência devemos testar se a série de potências converge ou não para $x = 1$ e $x = -1$.

  Para $x = 1$ obtemos a série alternada convergente $\sum \frac{(-1)^n}{n}$.

Para $x = -1$ *obtemos a série harmônica com* $k = 1$, *e portanto divergente,* $\sum \frac{1}{n}$.

Logo o raio de convergência da série é $R = 1$ *e seu intervalo de convergência é*

$$I =]-1, 1].$$

- *Trabalhando-se de modo inteiramente análogo vemos que a série* $\sum \frac{(-1)^n x^n}{n^2}$ *terá raio de convergência* $R = 1$ *mas neste caso a série convergirá absolutamente tanto para* $x = 1$ *como para* $x = -1$, *de fato,*

$$\sum \left| \frac{(-1)^n (\pm 1)^n}{n^2} \right| = \sum \frac{1}{n^2}$$

que converge pois é série geométrica com $k = 2$.

Assim neste caso $R = 1$ *é seu raio de convergência mas* $I = [-1, 1]$ *é seu intervalo de convergência.*

- *Seja* $\sum \left(\frac{n+2}{2n+3} \right)^n x^n$. *Aplicando-se o Critério inverso da raiz obtemos*

$$\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\sqrt[n]{\left(\frac{n+2}{2n+3} \right)^n}} = \left(\frac{2n+3}{n+2} \right) = \frac{2 + \frac{3}{n}}{1 + \frac{2}{n}} \to 2.$$

Logo $R = 2$. *Testando os extremos do intervalo, para* $x = 2$ *temos*

$$\sum \left(\frac{n+2}{2n+3} \right)^n 2^n = \sum \left(\frac{2n+4}{2n+3} \right)^n.$$

Esta série numérica tem termo geral $b_n = \left(\frac{2n+4}{2n+3} \right)^n = \left(1 + \frac{1}{2n+3} \right)^n$ *Veja que esta é uma variação da sequência* $\left(1 + \frac{1}{m} \right)^m \to e$. *Fazendo* $m = 2n + 3$ *temos*

$$\left(1 + \frac{1}{2n+3} \right)^n = \left(1 + \frac{1}{m} \right)^{\frac{m-3}{2}} = \left[\left(1 + \frac{1}{m} \right)^m \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{m} \right) \right]^{\frac{-3}{2}} \to e^{\frac{1}{2}} \neq 0.$$

Logo pelo Teste do termo geral I.7.2 esta série numérica diverge. Do mesmo modo a série de potências diverge se $x = -2$. *(Por que?)*

Logo para $\sum \left(\frac{n+2}{2n+3} \right)^n x^n$ *temos que* $R = 2$ *é seu raio de convergência e* $I =]-2, 2[$ *seu intervalo de convergência.*

- *Aproveitando-se dos cálculos do exemplo anterior vejamos o caso*

$$\sum \left(\frac{n+2}{2n+3}\right)^n (x+4)^n.$$

Veja que esta é uma série de potências centrada em $x_0 = -4$. Mas fazendo a mudança de variável $y = x - 4$ obtemos a série do exemplo anterior

$$\sum \left(\frac{n+2}{2n+3}\right)^n y^n$$

que tem raio de convergência $R = 2$ e intervalo de convergência $\hat{I} =]-2, 2[$.

Logo a série anterior converge se

$$y \in]-2, 2[\;\Leftrightarrow\; x + 4 \in]-2, 2[\;\Leftrightarrow\; x \in]-2-4, 2-4[\;\Leftrightarrow\;]-6, -2[$$

Assim $\sum \left(\frac{n+2}{2n+3}\right)^n (x+4)^n$ tem raio de convergência $R = 2$ e intervalo de convergência $I =]-6, -2[$.

Voltemos a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots$ para, a partir desta, construir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) a_{m+1} x^m = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 \cdots$$

Veja que esta série foi obtida derivando-se a primeira série termo a termo. Consideremos

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \to R \begin{cases} > 0 \text{ ou} \\ = \infty \end{cases}$$

Aplicando-se o Critério inverso da razão para a nova série temos

$$\left|\frac{n a_n}{(n+1) a_{n+1}}\right| = \frac{n}{n+1} \cdot \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \to R.$$

Assim vemos que ambas têm o mesmo raio de convergência. Da mesma forma se trabalharmos com a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$, vemos que

$$\left|\frac{\frac{a_n}{n+1}}{\frac{a_{n+1}}{n+2}}\right| = \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \cdot \left|\frac{n+2}{n+1}\right| \to R.$$

Teorema II.2.4. *Seja a_n tal que*

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \to R \quad ou \quad \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \to R$$

onde $R > 0$ ou $R = \infty$. Então

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad e \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

têm o mesmo raio de convergência R.

OBSERVAÇÃO II.5. *Podemos mostrar que: se R é o raio de convergência da série $\sum a_n x^n$ então também o será de $\sum n a_n x^{n-1}$ e de $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$, mesmo que R não tenha sido obtido do Critério inverso da raiz ou da razão.*

Este resultado nos diz que estas séries têm o o mesmo raio de convergência, porém NÃO garante que seus intervalos de convergência sejam os mesmos, como veremos em exemplos que virão adiante.

Mas a pergunta que se faz é: Qual a relação entre estas séries?

II.3 Aula 13 - Derivação e integração de séries de Potências.

Lembremos que da definição de séries convergentes temos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = b_0 + b_1 + b_2 + \cdots = b \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad s_n = \sum_{k=0}^{n} b_k = (b_0 + b_1 + b_2 + \cdots b_n) \to b.$$

o que equivale a dizer que para todo $\varepsilon > 0$ *existe índice* n_0 *tal que para* $n \geq n_0$ *temos* $|s_n - b| < \varepsilon$. *Concluímos então que*

$$|s_n - b| = \left| \sum_{k=0}^{n} b_k - \sum_{n=0}^{\infty} b_n \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \right| < \varepsilon \quad \textit{para todo} \quad n \geq n_0. \tag{1}$$

Vejamos que conclusões tirar quando usamos este fato em séries de potências com raio de convergência não nulo.

Teorema II.3.1. *(Continuidade de uma série de potências) Seja* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, *cujo raio de convergência é* $R \neq 0$. *Então* $f(x)$ *é função contínua para* $x \in\,]-R, R[$.

Prova: *Para mostrar que* $f(x)$ *é contínua em* $]-R, R[$ *vamos mostrar que para cada* $x_1 \in\,]-R, R[$ *e*

$$\varepsilon > 0 \quad \textit{existe} \quad \delta > 0 \quad \textit{tal que se} \quad |x - x_1| < \delta \quad \textit{então} \quad |f(x) - f(x_1)| < \varepsilon.$$

Fato 1: Para cada $x_1 \in\,]-R, R[$ *existe* $0 < M < R$ *tal que* $x_1 \in\,]-M, M[$. *Além disso da definição de raio de convergência temos que* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n M^n$ *converge absolutamente e portanto, como em (1) dado*

$$\varepsilon/3 > 0 \quad \textit{existe} \quad n_0 \quad \textit{tal que para} \quad n \geq n_0 \quad \textit{temos} \quad \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k M^k| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2}$$

Fato 2: Para este n_0 *tomemos o polinômio* $s_{n_0}(x) = \sum_{k=0}^{n_0} a_k x^k$. *Por ser polinômio e portanto função contínua, dado*

$$\varepsilon/3 > 0 \textit{ existe } \delta > 0 \textit{ tal que se } |x - x_1| < \delta \textit{ então } |s_{n_0}(x) - s_{n_0}(x_1)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Assim dado $\varepsilon > 0$ sejam n_0 e $\delta > 0$ dados dos pelos fatos 1. e 2. Tomemos então $x, x_1 \in]-M, M[\subset]-R, R[$. Então

$$\begin{aligned}|f(x)-f(x_1)| &\leq |f(x)-s_{n_0}(x)|+|s_{n_0}(x)-s_{n_0}(x_1)|+|s_{n_0}(x_1)-f(x_1)| \\ &= \left|\sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_k x^k\right| + |s_{n_0}(x)-s_{n_0}(x_1)| + \left|\sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_k x_1^k\right| \leq \\ &\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |a_k x^k| + \left|\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |a_k x_1^k| + |s_{n_0}(x)-s_{n_0}(x_1)\right| \leq \\ &2\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |a_k| M^k + |s_{n_0}(x)-s_{n_0}(x_1)| < 2\varepsilon/3+\varepsilon/3.\end{aligned}$$

Logo para cada $x_1 \in]-R, R[$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $|x - x_1| < \delta$ então $|f(x) - f(x_1)| < \varepsilon$ e portanto $f(x)$ é contínua para todo $x_1 \in]-R, R[$.

Antes de enunciarmos o próximo teorema, observemos que o resultado anterior nos deu a continuidade de f em $]-R, R[$ e consequentemente, do Teorema fundamental do Cálculo, sabemos que podemos integrar f em qualquer subintervalo fechado e limitado de $]-R, R[$.

Teorema II.3.2. *(Integral de uma série de potências). Seja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ com raio de convergência $R \neq 0$. Então para todo intervalo $[a, b] \subset]-R, R[$ temos*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n dx \tag{3}$$

Em particular para todo $x \in]-R, R[$, uma primitiva de $f(x)$ será

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

cujo raio de convergência também é R.

Prova:

Fato 1. Pelo resultado anterior $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é função contínua em $]-R, R[$ e portanto, podemos integrá-la sobre qualquer intervalo $[a, b] \subset]-R, R[$.

Fato 2. Dado intervalo $[a, b] \subset]-R, R[$ existe $M < R$ tal que se $x \in [a, b]$ tem-se $|x| < M$. Além disso, como $M \in]-R, R[$ a série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n M^n|$ converge e em consequência de (1) dado

$\dfrac{\varepsilon}{b-a} > 0$ *existe* n_0 *tal que para* $n \geq n_0$ *tem-se*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| M^k < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Primeiramente observe que

$$\int_a^b s_n(x)dx = \sum_{k=0}^{n} \int_a^b a_k x^k dx.$$

Veja que provar (3) equivale a mostrar que

$$\int_a^b f(x)dx = \lim \int_a^b s_n(x)dx.$$

Assim dado $\varepsilon > 0$ *seja* n_0 *dado pelo Fato 2. Logo*

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b s_n(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - s_n(x)|dx = \int_a^b \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \; dx \right| \leq \int_a^b \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| M^k dx < \varepsilon \tag{4}$$

Para a segunda parte da demonstração veja que tomando-se $a = 0$ *e* $b = x$ *temos que*

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

é uma primitiva de $f(x)$*, e pelo Teorema II.2.4 tem raio de convergência* R*, como queríamos.*

Observação II.6. *Note que a série original é centrada em* $x_0 = 0$ *e para obter uma primitiva dela integramos de* 0 *a* x*. Do mesmo modo se tivéssemos uma série centrada em* $x_0 \neq 0$ *obteríamos uma primitiva de* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ *integrando-a de* x_0 *a* x *obtendo-se* $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}$.

Teorema II.3.3. *(Derivada de uma série de potências). Seja* $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *com raio de convergência* $R \neq 0$*. Então para todo* $x \in \,]-R, R[$ *temos que* $f(x)$ *é derivável e sua derivada é*

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}. \tag{5}$$

cujo raio de convergência é R*.*

Prova: *Seja* $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

Já vimos que como f tem raio de convergência $R \neq 0$ então g tem o mesmo raio de convergência e portanto, podemos aplicar o resultado anterior. Assim uma primitiva de $g(x)$ será

$$G(x) = \int_0^x g(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \int_0^x t^{n-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = f(x) - a_0.$$

Então $G'(x) = g(x)$ bem como $G'(x) = f'(x)$, logo $g(x) = f'(x)$, e pelo Teorema II.2.4 $g(x)$ tem raio de convergência R, como queríamos.

Este fato nos fornece uma das propriedades mais importantes das séries de potências:

Corolário II.3.4. *Se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ com raio de convergência $R \neq 0$ então esta função é infinitamente derivável no intervalo $]-R, R[$ e para cada $k \geq 1$ a derivada de ordem k de $f(x)$ será*

$$\frac{d^k}{dx^k} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=k}^{\infty} [n(n-1)(n-2) \cdots (n-(k-1))] \; x^{n-k}$$

todas com raio de convergência R.

Prova: *Basta observarmos que toda série de potências com raio de convergência $R \neq 0$ é derivável e gera nova série de potências com mesmo raio de convergência. Então aplicamos o teorema anterior k vezes na série dada.*

Observação II.7. *Os dois últimos teoremas nos dizem que derivar ou integrar uma função dada através de uma série de potências com raio de convergência não nulo, é como derivar ou integrar um polinômio.*

Com estes últimos resultados podemos construir inúmeros exemplos de séries de potências e conhecermos a função para as quais elas convergem. Nosso ponto de partida será a série geométrica.

Exemplo II.7. *Sabemos que*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \textit{para} \quad |x| < 1 = R$$

- *Como* $f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$*, derivando a série anterior e usando o Teorema II.2.4 também teremos*

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots n x^{n-1} + \cdots \quad \textit{para} \quad |x| < 1.$$

- *Bem como*

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^{n-2} = 2 + 3 \cdot 2x + 4 \cdot 3x^2 + 5 \cdot 4x^3 \cdots \quad \textit{para} \quad |x| < 1.$$

$$f'''(x) = \frac{2 \cdot 3}{(1-x)^4} = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) x^{n-3} = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 2x + 5 \cdot 4 \cdot 3x^2 \cdots \quad \textit{para} \quad |x| < 1.$$

Exercício II.1. *Use o Método da Indução Finita para mostrar que*

$$\frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{\infty} [n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)] \; x^{n-k} \quad \textit{para} \quad |x| < 1.$$

Exemplo II.8. *Trocando-se x por $-x$ na série geométrica obtemos*

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad \textit{para} \quad |-x| = |x| < 1. \tag{6}$$

Temos que

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln|1+x| = \ln(1+x) \quad \textit{para} \quad |x| < 1$$

logo integrando a série em (6) temos do Teorema II.3.2 que

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \cdots \quad \textit{para} \quad |x| < 1.$$

Note que o intervalo de convergência desta série é $I =]-1, 1]$. De fato para $x = 1$ teremos uma série alternada convergente e para $x = -1$ uma série harmônica com $k = 1$.

Não mostraremos mas vale o seguinte resultado:

Teorema II.3.5. *Seja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $R > 0$ seu raio de convergência. Se a série converge para $x = R$ então $f(R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$. Idem para $x = -R$.*

Pelo Teorema anterior, como a série de $\ln(x+1)$ *converge em* $x = 1$ *temos que a conhecida série alternada será o valor de:*

$$\ln 2 = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Exemplo II.9. *Vamos trocar* x *por* $-x^2$ *na série geométrica, obtendo*

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad para \quad |x^2| < 1 \quad e\ portanto\ para \quad |x| < 1.$$

Note que tal série diverge para $x = \pm 1$.

Integrando-se tal série de 0 *a* x *concluímos que para* $|x^2| < 1$ *e portanto para* $|x| < 1$

$$arc\ tg\ x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \cdots .$$

Mostre que seu intervalo de convergência é $[-1, 1]$ *e calcule o valor desta série para* $x = 1$.

Observação II.8. *Conforme comentado anteriormente, ao integrarmos uma série de potências, a série resultante sempre terá o mesmo raio de convergência que a original, mas o intervalo de convergência pode ser diferente (" maior") que o da original.*

Exercício II.2. *Determine a representação em séries de potências de* x *para as funções abaixo, e forneça o intervalo de convergência de cada uma:*

a) $\dfrac{1}{1-x^2}$.

b) $\dfrac{2x}{(1-x^2)^2}$.

c) $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1-t^2}$.

Observação II.9. *De modo inteiramente análogo ao caso estudado, se nos teoremas anteriores trocarmos* x *por* $x - x_0$, *qualquer que seja* $x_0 \in \mathbb{R}$ *fixo, concluímos que*

$$para\ todo\ x\ tal\ que\ |x - x_0| < R \neq 0\ vale\ que\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

a) $f(x)$ *é contínua,*

b) $f(x)$ tem primitiva dada por $F(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(s)ds = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$,

c) $f(x)$ é infinitamente derivável e para todo $k \geq 1$ tem-se

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))a_n(x-x_0)^{n-k}.$$

Não deixe de fazer um resumo desta aula destacando-se seus aspectos fundamentais.

II.4 Aula 14 - Série de Taylor.

Vimos que se uma série de potências converge e tem raio de convergência $R \neq 0$ então ela descreve uma função infinitamente derivável

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+a_3(x-x_0)^3 \cdots \quad \textit{para} \quad x \in \,]x_0-R, x_0+R[. \tag{7}$$

Que informações esta série fornece sobre $f(x)$?

Observemos inicialmente que

$$f(x_0) = a_0.$$

Como f é derivável e $f'(x) = a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+4a_4(x-x_0)^3+\cdots$ concluímos que

$$f'(x_0) = a_1.$$

Como f' é derivável e $f''(x) = 2a_2+3\cdot 2a_2(x-x_0)+4\cdot 3a_3(x-x_0)^2+\cdots$ concluímos que

$$f''(x_0) = 2a_2.$$

Como f'' é derivável e $f'''(x) = 3\cdot 2a_2+4\cdot 3\cdot 2a_3(x-x_0)+\cdots$ concluímos que

$$f'''(x_0) = 3!a_3.$$

Usando o método da indução demonstra-se que:

$$\boxed{f^{(n)}(x_0) = n!\; a_n}$$

Logo temos o seguinte resultado:

Teorema II.4.1. *Seja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ com raio de convergência $R > 0$ ou $R = \infty$. Então*

$$\boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad \textit{para} \quad n = 0, 1, 2, 3, \cdots}$$

Observação II.10. *Deste modo, a expressão da série (7) nos dá a "radiografia" da função $f(x)$ no ponto x_0 o que dá ainda mais sentido a seu nome: série de potências centrada em x_0, uma vez que através dos coeficientes a_n podemos determinar a derivada de ordem n de f no ponto x_0, para qualquer n.*

Exemplo II.10. *Vimos que* $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ *para* $|x| < 1$. *Se quisermos conhecer* $f^{(15)}(0)$ *basta observar qual é o coeficiente que acompanha a potência* x^{15} *na série que a representa, isto é* a_{15}. *Mas neste caso* $a_n = 1$ *para todo* n *e portanto*

$$f^{(15)}(0) = 15!\ a_{15} = 15!$$

Exemplo II.11. *Seja* $f(x) = \dfrac{1}{1+4x^2} \overbrace{=}^{exercício} \sum_{n=0}^{\infty} (-4)^n x^{2n}$ *para* $|x| < \dfrac{1}{2}$. *Neste exemplo vemos que*

$$a_{2n} = (-4)^n, \quad e \quad a_{2n+1} = 0 \quad para \quad n \geq 0.$$

Assim qualquer derivada de f *de ordem ímpar avaliada no ponto* 0 *será nula. (Isso não é mero acaso, veja exercício abaixo). Além disso temos que*

$$f^{(2n)}(0) = (2n)! a_{2n} = (2n)!(-4)^n$$

Observe que estas informações, em particular, nos garantem que $x = 0$ *é ponto crítico de* $f(x)$ *e mais especificamente é um ponto de máximo local.*

Exercício II.3. *Mostre que se* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *para* $|x| < R$ *onde* $R > 0$ *ou* $R = \infty$ *então:*

a) Se $f(x) = f(-x)$ *para todo* $x \in]-R, R[$ *então* $a_{2n+1} = 0$, *isto é, se* f *é par sua série de potências de* x *só tem potências pares.*

b) Se $f(x) = -f(-x)$ *para todo* $x \in]-R, R[$ *então* $a_{2n} = 0$, *isto é, se* f *é ímpar sua série de potências de* x *só tem potências ímpares.*

Vimos que se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ *para* $x \in\ ]-R, R[$ *então temos uma função infinitamente derivável onde*

$$\boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad para \quad n = 0, 1, 2, 3, \cdots}$$

Logo esta fórmula nos dá uma maneira de construir séries de potências a partir de uma função infinitamente derivável definida em algum intervalo, já que podemos construir a_n *como acima. A estas séries daremos o nome de Séries de Taylor.*

Definição II.4.2. *Seja I intervalo aberto da reta e $x_0 \in I$. Se $f : I \to \mathbb{R}$ é função infinitamente derivável em I definimos a série de Taylor de f centrada em x_0 por:*

$$s_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Em particular, se $x_0 = 0$, a série

$$s_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

é denominada Série de Maclaurin de f.

Pergunta-se:

a) Esta série converge para $x \neq x_0$?

b) Se convergir, converge para a própria $f(x)$?

Estes serão pontos fundamentais que exploraremos adiante. Mas por enquanto vejamos algums exemplos de séries de Maclaurin que serão bastante utilizadas.

Exemplo II.12. *Seja $f(x) = e^x$ função infinitamente derivável na reta. Como $\dfrac{d^n}{dx^n}(e^x) = e^x$ para todo n em particular temos que*

$$f^{(n)}(0) = 1 \quad \textit{para todo} \quad n \geq 0.$$

Assim a série de Maclaurin de $f(x) = e^x$ será

$$s_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \cdots \tag{8}$$

Além disso, aplicando-se o Critério inverso da razão temos que seu raio de convergência é infinito. Logo a série de Maclaurin de $f(x) = e^x$ é também uma função definida em toda a reta.

Exemplo II.13. *Seja $f(x) = sen\ x$ função infinitamente derivável na reta. Veja que*

$$\begin{array}{llll} f(x) = senx & f^{(4)}(x) = senx & f^{(8)}(x) = senx & \cdots \\ f'(x) = cosx & f^{(5)}(x) = cosx & f^{(9)}(x) = cosx & \cdots \\ f''(x) = -senx & f^{(6)}(x) = -senx & f^{(10)}(x) = -senx & \cdots \\ f'''(x) = -cosx & f^{(7)}(x) = -cosx & f^{(11)}(x) = -cosx & \cdots \end{array}$$

Dai concluímos que

$$f^{(4n)}(0) = 0 \quad f^{(4n+1)}(0) = 1 \quad f^{(4n+2)}(0) = 0 \quad f^{(4n+3)}(0) = -1$$

o que nos dá:

$$f^{(2n)}(0) = 0 \text{ e } f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n, \text{ para } n \geq 0.$$

Consequentemente a série de Maclaurin de $f(x) = senx$ não conterá potências pares de x, o que era de se esperar (Por que?). E os coeficientes dos termos de potências ímpares satisfarão

$$a_{2n+1} = \frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \quad \text{para} \quad n \geq 0$$

dando -nos a série de Maclaurin

$$s_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \cdots$$

Para determinar seu raio de convergência vamos procurar o raio de convergência da série $\sum \frac{(-1)^n y^n}{(2n+1)!}$. Usando o critério inverso da razão teremos:

$$\left| \frac{\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}}{\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!}} \right| = (2n+3)(2n+2) \to \infty$$

Logo a série converge para todo $y \in \mathbb{R}$. Trocando-se y por x^2 concluímos que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x^2)^n}{(2n+1)!}$ convergirá para todo x^2 e consequentemente para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo o mesmo se dará para $x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x^2)^n}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Assim a série de Maclaurin de $f(x) = senx$ é uma função infinitamente derivável em toda a reta.

Exemplo II.14. *Agindo de modo inteiramente análogo ao exemplo anterior concluímos que $f(x) = cosx$ tem série de Maclaurin*

$$s_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \cdots$$

e seu raio de convergência é infinito.

Observe que $(senx)' = cosx$ e que derivando-se a série de Maclaurin de $f(x) = senx$ obtemos a série de Maclaurin de $f(x) = cosx$. Será coincidência?

Exercício II.4. *Mostre que a série de Maclaurin de* $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ *é a série geométrica* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

Já sabemos que no caso específico do exercício anterior temos que $\dfrac{1}{1-x} = s_f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ *para* $x \in]-1,1[$, *isto é,* $f(x)$ *e sua série de Maclaurin são iguais neste intervalo. Será que o mesmo se dá para qualquer função infinitamente derivável e sua série de Taylor ou Maclaurin? Para responder esta pergunta vamos precisar do Teorema da Fórmula de Taylor visto no Cálculo I. Antes disso vejamos a seguinte definição:*

Definição II.4.3. *Sejam* I *intervalo aberto da reta e* $f(x) : I \to \mathbb{R}$ *infinitamente derivável. Denominamos o polinômio de Taylor de* f *de grau* n *centrado em* $x_0 \in I$, *como sendo*

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Se $x_0 = 0$ *então*

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

é denominado polinômio de Maclaurin de $f(x)$ *de grau* n.

Note que a menos que $f^{(n)}(x_0) = 0$ *este realmente será um polinômio de grau* n. *Caso contrário terá grau menor, mas continua sendo chamado de polinômio de Taylor de grau* n.

Exemplo II.15. *Se* $f(x) = cos x$ *então seus polinômios de Maclaurin de graus* 2 *e* 3 *são os mesmos:*

$$P_2(x) = P_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2!}$$

Observação II.11. *Note que se* $P_n(x)$ *é o polinômio de Taylor de* f, *de grau* n *e centrado em* x_0, *então as derivadas até ordem* n, *no ponto* x_0, *de* $f(x)$ *e de* $P_n(x)$ *são exatamente as mesmas.*

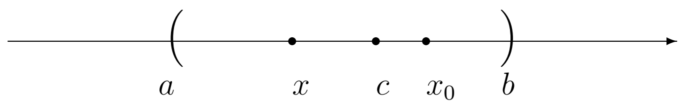
Teorema II.4.4. $\{$*Teorema da Fórmula de Taylor*$\}$ *Seja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *função infinitamente derivável e seja* $x_0 \in]a,b[$. *Então para cada* n *e* $x \in]a,b[$ *existem número* c *entre* x *e* x_0 *e função* $R_n(x)$ *tais que*

$$f(x) = \left[f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \cdots \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \right] + R_n(x)$$

$$= P_n(x) + R_n(x)$$

onde $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$.

OBSERVAÇÃO II.12. *Note que o número c pode variar a medida que n e x variam. Em geral não sabemos quem é c, apenas que sua localização está entre* x_0 *e* x.



OBSERVAÇÃO II.13. *Note ainda que pelo fato de f ser infinitamente derivável temos que* $f^{n+1}(x)$ *é contínua para todo* $x \in I$ *e qualquer n. Assim se* $x \to x_0$ *então* $c \to x_0$ *e consequentemente*

$$\lim_{x\to x_0} f^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(x_0) \text{ bem como } \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Logo, entre outras coisas, o Teorema da Fórmula de Taylor nos diz que quanto mais próximo x estiver de x_0 *mais próxima a função* $f(x)$ *estará de seus polinômios de Taylor centrados em* x_0.

OBSERVAÇÃO II.14. *Nosso próximo objetivo é obter uma estimativa para* $f^{(n)}(c)$ *para todo n, de modo que quanto maior for n, mais próxima a função* $R^n(x)$ *estará da função nula e consequentemente, para n tendendo ao infinito,* $f(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x) + R_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}$

II.5 Aula 15 - Convergência das Séries de Taylor.

Seria desejável que uma função pudesse ser representada por sua série de Taylor, onde uma das vantagens é que, derivá-la ou integrá-la seria como derivar ou integrar um polinômio.

Definição II.5.1. *Seja I intervalo aberto contendo ponto x_0 e seja $f : I_{x_0} \to \mathbb{R}$ infinitamente derivável em I. Se*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad \text{para} \quad x \in \ I_{x_0}$$

dizemos que f é analítica em x_0.

Exemplo II.16. *Já vimos que $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ para $|x| < 1$ e que esta série é a sua série de Maclaurin. Assim $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ é analítica em $x_0 = 0$.*

Exemplo II.17. *Mas nem toda função infinitamente derivável coincide com sua série de Taylor. O exemplo clássico deste fato é dado pela função*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

Esta função é claramente infinitamente derivável se $x \neq 0$. Mas podemos mostrar também que para todo n,

$$f^{(n)}(0) = 0.$$

Assim ela é infinitamente derivável na reta e portanto tem série de Maclaurin:

$$s_f(x) = 0 + 0x + 0x^2 + \cdots 0x^n + \cdots = 0.$$

Logo esta função tem série de Maclaurin convergindo para todo $x \in \ \mathbb{R}$ para a função identicamente nula. Mas $f(x) \neq 0 = s_f(x)$ se $x \neq 0$. Logo f não é analítica em $x_0 = 0$.

Para que uma função seja analítica em algum x_0 deveríamos mostrar que para todo x em algum intervalo contendo x_0 tem-se $P_n(x) \to f(x)$, isto é,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^n.$$

onde $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!}$ *é o polinômio de Taylor de grau* n *de* f *e também é a sequência das somas parciais da Série de Taylor de* f*, ambos centrados em* x_0*. Para mostrar tal resultado usaremos o Teorema da Fórmula de Taylor.*

Teorema II.5.2. *Seja* $f :]a,b[\to R$ *função infinitamente derivável e* $x_0 \in\,]a,b[$*. Suponha que exista* $M > 0$ *tal que tenhamos*

$$|f^{(n)}(x)| \leq M \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad x \in]a,b[.$$

Então

$$s_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{n!} = f(x) \quad \text{para todo} \quad x \in]a,b[.$$

Prova: *De fato, usando o Teorema da Fórmula de Taylor temos que para cada* n *e* x *existe* c *tal que*

$$|f(x) - P_n(x)| = |R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \right|$$

Além disso $x, x_0 \in]a,b[$ *logo* $|x - x_0| < b - a$ *e pela hipótese, temos* $|f^{(n)}(x)| \leq M$ *para todo* $x \in\,]a,b[$*, em particular para* $x = c$*. Portanto*

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Mas usando o teste da razão para convergência de sequências, temos que

$$\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \to 0.$$

Assim para cada $\varepsilon > 0$ *existe* n_0 *tal que se* $n > n_0$ *temos*

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} < \varepsilon \text{ para todo } x \in]a,b[.$$

Logo $P_n(x) \to f(x)$ *para todo* $x \in\,]a,b[$*.*

Exemplo II.18. *Algumas funções analíticas em* $x = 0$ *são:*

- $senx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \cdots$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.
- $cosx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \cdots$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \cdots$ *para todo* $\quad x \in \mathbb{R}$.

Para confirmar estes fatos precisamos concluir que as derivadas destas funções são limitadas em intervalo aberto contendo $x_0 = 0$.

Para isto, basta observar que nos dois primeiros exemplos, $f^{(n)}(x) = \pm \begin{cases} senx \\ cosx \end{cases}$ *e em qualquer destas situações* $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$. *Logo pelo teorema anterior as funções são analíticas em qualquer* $x_0 \in \mathbb{R}$, *e em particular em* $x_0 = 0$, *como queríamos.*

No último exemplo observe que qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, *existe intervalo limitado* $]-a, a[$ *contendo* 0 *e* x. *Além disso como* $f^{(n)}(x) = e^x$ *temos que* $|f^{(n)}(x)| \leq e^a$ *para todo* $x \in]-a, a[$. *Logo* $f(x) = e^x$ *é analítica em* $x_0 = 0$ *e portanto* $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \cdots$ *para todo* $\quad x \in]-a, a[$. *Como para cada* $x \in \mathbb{R}$ *existe* a *tal que* $x \in]-a, a[$ *concluímos que*

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \cdots \quad \textit{para todo} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Não são muitas as funções que satisfazem o teorema anterior, mas com uma mudança de variáveis, derivação ou integração destas últimas séries, podemos facilmente construir as séries de Maclaurin(ou de Taylor) de inúmeras outras funções.

Observação II.15. *Avaliação do erro cometido ao aproximarmos* $f(x)$ *por* $P_n(x)$*:*

Se num intervalo contendo x_0 *temos que*

$$f(x) = s_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

qual o erro que cometemos quando aproximamos $f(x)$ *de um polinômio de Taylor,* $P_n(x)$, *para algum* n*?*

Para isso voltaremos ao Teorema da Fórmula de Taylor, mais especificamente

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{|f^{(n+1)}(c)||x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \tag{9}$$

Já vimos, através do lado direito desta desiguadade, que quanto mais perto x *está de* x_0, *mais próximo* P_n *está de* f. *Mas também vemos que quanto maior for* n, *e portanto maior o grau de* $P_n(x)$, *melhor será a aproximação de* $f(x)$ *por* $P_n(x)$.

Vejamos como isto se aplica no exemplo abaixo:

Exemplo II.19. *Seja* $f(x) = senx$ *e seja* $P_4(x) = x - \frac{x^3}{3!}$ *seu polinômio de Maclaurin de grau 4. Estime o erro cometido quando aproximamos* f *de* P_4 *no intervalo* $[-1, 1]$*. Usando (9) temos que* $n = 4$ *e* $|x - 0| = |x| \leq 1$ *e* $|f^{(n)}(c)| \leq 1$*. Logo para todo* $x \in [-1, 1]$ *temos*

$$|senx - P_4(x)| \leq \frac{1}{5!} = \frac{1}{120} = 0,0083333\cdots$$

Exercício II.5. *a) Se no exemplo anterior tomarmos* $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ *qual o erro cometido ao se aproximar* f *de* P_5*?*

b) Se no exemplo anterior, mantivermos o intervalo $[-1, 1]$ *qual o erro cometido ao aproximarmos* f *de seu polinômio de Maclaurin de grau 7,* $P_7(x)$*?*

c) Usando um polinômio de Maclaurin , estime o valor de $sen(0,7)$ *com erro inferior a* $0,025$.

Observação II.16. *Uma sugestão é entrar no Desmos Power Series e ver como você pode enxergar a diferença entre uma funç ao e seus polinômios de Taylor, num intervalo limitado.*

CONSTRUINDO SÉRIES DE MACLAURIN SEM USAR A DEFINIÇÃO

Com os exemplos abaixo, vamos ver como construir algumas séries de Maclaurin, usando séries já conhecidas. Com isso evitaremos o cálculo das derivadas de todas as ordens da função, o que nos casos abaixo seria demasiadamente trabalhoso.

Exemplo II.20. *Sabemos que* $senx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$*. A partir desta série construímos por exemplo:*

- $f(x) = x^3 senx = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+4}}{(2n+1)!}$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$*.(Basta multiplicar a série de Maclaurin de senx por* x^3*.)*
- $f(x) = senx^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!}$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$*.(Basta trocar* x *por* x^2 *na série de Maclaurin de senx).*

  Em particular, veja que rapidamente podemos reconhecer o valor das derivadas de quaisquer ordens desta função, quando avaliadas em $x = 0$*. De fato, primeiramente observemos que da expressão da série obtida concluímos que:*

$$a_{4n+2} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \ \text{ e } a_m = 0 \text{ para todo } m \neq 4n+2.$$

Assim temos que $f^{(m)}(0) = 0$ *para todo* $m \neq 4n+2$ *mas* $f^{(4n+2)}(0) = [(4n+2)!]a_{4n+2} = [(4n+2)!]\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}$.

- $f(x) = \dfrac{senx}{x} = \dfrac{1}{x}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$. *Neste exemplo vemos que apesar de* $f(x) = \dfrac{senx}{x}$ *não estar definida em* $x_0 = 0$ *ela tem série de Maclaurin. E como toda série de potências convergente na reta é função contínua na reta em particular ela é contínua em* $x = 0$. *Sabemos ainda que*

$$f^{(n)}(0) = a_n n! \ \text{ para todo } \ n$$

Logo

$$f(0) = a_0 0! = \frac{(-1)^0}{(2\cdot 0+1)!} = 1$$

Mas este é exatamente o valor de $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x} = 1$. *Assim a série encontrada, na realidade é a série da função*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{senx}{x} & se \quad x \neq 0 \\ 1 & se \quad x = 0. \end{cases}$$

Vejamos agora como usar séries de potências para integrar funções analíticas que não têm primitivas elementares.

Exemplo II.21. *Encontre uma primitiva de* $f(x) = e^{x^3}$. *Esta é uma função contínua em toda reta e portanto tem primitiva. Porém ela não tem primitiva em termos elementares. O único modo de se obter uma primitiva para esta função é usando série de potências.*

Assim determinaremos $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{t^3}dt$.

Como $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\cdots$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$ *temos que*

$$e^{t^3} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t^3)^n}{n!} = 1 + t^3 + \frac{t^6}{2} + \frac{t^9}{3!} + \cdots\frac{t^{3n}}{n!}\cdots \ \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Logo para todo $x \in \mathbb{R}$ *temos que uma primitiva de* e^{x^3} *é:*

$$F(x) = \int_0^x e^{t^3}dt = \int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{3n}}{n!}\right]dt = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\frac{t^{3n}}{n!}dt\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{(3n+1)n!}$$

II.6 Aula 16 - Resolvendo Equações Diferenciais Ordinárias via Série de Potências.

Já vimos que se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ *para* $x \in]x_0 - R, x_0 + R[$, *onde* $R > 0$ *ou* $R = \infty$, *então esta função é infinitamente derivável em* I_{x_0} *e além disso,*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}. \tag{10}$$

Deste fato decorre imediatamente que

Teorema II.6.1. *Se* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ *e* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n$ *para* x *em algum intervalo contendo* x_0 *então* $a_n = b_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Com este princípio vamos buscar soluções para algumas Equações Diferenciais Ordinárias. Por simplicidade trataremos de Equações lineares de primeira ou segunda ordem cujos coeficientes são polinômios.

Assim consideremos os polinômios $P(t), Q(t), R(t)$ *e uma função* $f(t)$. *Se* $Q(t)$ *for uma função não nula a equação abaixo será uma equação diferencial linear de primeira ordem.*

$$Q(t)x'(t) + R(t)x(t) = f(t).$$

Já para

$$P(t)x''(t) + Q(t)x'(t) + R(t)x(t) = f(t) \tag{11}$$

se $P(t)$ *for função não nula esta será uma equação diferencial linear de segunda ordem.*

Vamos então buscar soluções para os correspondentes problemas de valores iniciais dados por

$$\begin{cases} Q(t)x'(t) + R(t)x(t) = f(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} P(t)x''(t) + Q(t)x'(t) + R(t)x(t) = f(t) \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{12}$$

Como, em ambos os problemas a condição inicial foi fixada no instante t_0, *vamos admitir que* $f(t)$ *seja analítica neste ponto. Buscaremos assim soluções* $x(t)$ *que sejam analíticas em* t_0, *isto é, soluções da forma*

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t - t_0)^n.$$

Vamos trabalhar diretamente nos exemplos para mostrar como buscar soluções destes problemas. Para garantir a existência de soluções trabalharemos dentro das condições do Teorema de Existência e Unicidade de equações diferenciais ordinárias. Com as hipóteses já adotadas, basta tomarmos $Q(t_0) \neq 0$ para as equações de primeira ordem e $P(t_0) \neq 0$ para as de segunda ordem.

Exemplo II.22.

$$\begin{cases} x' + x = 0 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

onde $x = x(t)$ e $x' = x'(t)$. Veja que neste caso $Q(t) = R(t) = 1$, $f(t) = 0$, $t_0 = 0$ e $x_0 = 1$. Como $t_0 = 0$ buscaremos como solução deste problema uma função dada por série de potências centrada em $t_0 = 0$, isto é,

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots .$$

Primeiramente como temos que $x(0) = 1$, substituindo na expressão acima determinamos que

$$x(0) = a_0 = 1.$$

além disso

$$x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}.$$

Agora substituímos as séries de x e x' na equação dada obtendo

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0$$

Para que possamos trabalhar com a igualdade de séries de potências, como no Teorema II.6.1, vamos uniformizar os expoentes das potências de x nestas somatória. Assim fazendo $m = n - 1$ na primeira somatória e $m = n$ na segunda somatória obtemos

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+1) a_{m+1} t^m + \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^m = 0$$

isto é,

$$\sum_{m=0}^{\infty} [(m+1) a_{m+1} + a_m] t^m = 0 = \sum_{m=0}^{\infty} [0] \ t^m$$

Logo pelo Teorema II.6.1 temos que

$$[(m+1)a_{m+1} + a_m] = 0 \quad \textit{para} \quad m \geq 0 \;\; \textit{ou equivalentemente} \;\; a_{m+1} = \frac{-a_m}{m+1}$$

Mas precisamos encontrar a_m em função de m e então obter $x(t)$.

Veja que calculando-se a_m para alguns valores de m obtemos:

$a_0 = 1$, *como visto anteriormente,*

$a_1 = \dfrac{-a_0}{1} = -1,$

$a_2 = \dfrac{-a_1}{2} = (-1)^2\dfrac{1}{2},$

$a_3 = \dfrac{-a_2}{3} = (-1)^3\dfrac{1}{3\cdot 2} = \dfrac{-1}{6},$

$a_4 = \dfrac{-a_3}{4} = (-1)^4\dfrac{1}{4\cdot 3\cdot 2} = \dfrac{-1}{24},$

$\vdots$

Estas expressões indicam que $a_m = \dfrac{(-1)^m}{m!}$ para $m \geq 0$. Para termos certeza precisamos do Método da Indução Finita.

Assim, já vimos que tal lei é satisfeita para $m = 0$. Suponhamos que valha para todo índice até m, isto é

$$\textit{para} \;\; k = 0, 1, \cdots m \;\; \textit{temos} \quad a_k = \frac{(-1)^k}{k!}$$

Mostremos que vale para $m+1$.

Como $a_{m+1} = \dfrac{-a_m}{m+1}$ e pela hipótese de indução temos $a_m = \dfrac{(-1)^m}{m!}$ concluímos que

$$a_{m+1} = \frac{-\dfrac{(-1)^m}{m!}}{m+1} = \frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!}$$

Conclusão, se $a_{n+1} = \dfrac{-a_n}{n+1}$ para $n \geq 0$ então $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n!}$ e portanto a solução do problema é a função

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n!}$$

que neste caso sabemos ser

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t)^n}{n!} = e^{-t}$$

Exemplo II.23.

$$\begin{cases} x'' - 2tx' - x = e^{t^2} \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 0. \end{cases}$$

Veja que temos os polinômios $P(t) = 1$, $Q(t) = -2t$, $R(t) = -1$ e a função analítica $f(t) = e^{t^2}$. Como $t_0 = 0$ vamos buscar uma solução na forma

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

Assim temos também

$$x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} \quad e \quad x''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) n a_n t^{n-2}$$

$$a_0 = x(0) = 1 \quad e \quad a_1 = x'(0) = 0$$

$$e^{t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t^2)^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{2m}}{m!}$$

Substituindo primeiramente as séries no lado esquerdo da equação diferencial

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) n a_n t^{n-2} - 2t \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n =$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) n a_n t^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = e^{t^2}$$

Agora vamos uniformizar os expoentes das potências de t fazendo $m = n-2$ na primeira somatória e $m = n$ nas segunda e terceira somatórias, obtendo

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+1)(m+2) a_{m+2} t^m - \sum_{m=1}^{\infty} 2m a_m t^m - \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^m = e^{t^2}.$$

Agora precisamos reunir os termos comuns numa única somatória. Mas veja que a segunda somatória começa em $m = 1$ e as demais em $m = 0$. Assim rearranjando para que elas comecem a ser somadas no mesmo ponto de partida temos

$$\underbrace{2a_2 - a_0}_{b_0} + \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{(m+1)(m+2)a_{m+2} - (2m+1)a_m}_{b_m} t^m = e^{t^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{2m}}{m!} = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{3!} + \cdots$$

Reescrevendo esta igualdade temos:

$$b_0 + \sum_{m=1}^{\infty} b_m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{2m}}{m!}$$

Comparando-se os termos das duas somatórias vemos que no lado direito da igualdade só aparecem termos de expoentes pares enquanto que do lado esquerdo aparecem termos para potências pares e ímpares. Assim precisamos esta igualdade se dará apenas se

$$2a_2 - a_0 = b_0 = 1$$

$$(2m+1)(2m+2)a_{2m+2} - (2(2m)+1)a_{2m} = b_{2m} = \frac{1}{m!} \quad para \quad m = 1, 2, \cdots$$

$$[(2m-1)+1)((2m-1)+2]a_{(2m-1)+2} - [2(2m-1)+1]a_{2m-1} = b_{2m+1} = 0 \quad para \quad m = 1, 2, \cdots$$

isto é,

$$2a_2 - a_0 = 1 \tag{13}$$

$$(2m+1)(2m+2)a_{2m+2} - (4m+1)a_{2m} = \frac{1}{m!} \tag{14}$$

$$(2m)(2m+1)a_{2m+1} - [4m-1]a_{2m-1} = 0 \tag{15}$$

Assim usando (15) e $a_1 = 0$ *teremos:*

$m = 1 \Rightarrow 2 \cdot 3a_3 - 3a_1 = 0 \Rightarrow a_3 = 0.$

$m = 2 \Rightarrow 4 \cdot 5a_5 - 7a_3 = 0 \Rightarrow a_5 = 0.$

$m = 3 \Rightarrow 6 \cdot 7a_7 - 11a_5 = 0 \Rightarrow a_7 = 0.$

$\vdots$

Neste caso, vamos dispensar o Método da Indução, pois é muito fácil ver que

$$a_{2n+1} = 0 \quad para\ todo \quad n \geq 0.$$

Por outro lado, usando (13) e que $a_0 = 1$ *teremos:*

$$a_2 = 1$$

Então, usando (14) teremos

$m = 1 \Rightarrow 3 \cdot 4a_4 - 5a_2 = 1 \Rightarrow a_4 = \frac{1}{2}.$

$m = 2 \Rightarrow 5 \cdot 6a_6 - 9a_4 = \frac{1}{2} \Rightarrow a_6 = \frac{1}{6}.$

$m = 3 \Rightarrow 7 \cdot 8a_8 - 13a_6 = \frac{1}{6} \Rightarrow a_8 = \frac{1}{24}$

$m = 4 \Rightarrow 9 \cdot 10a_{10} - 17a_8 = \frac{1}{24} \Rightarrow a_{10} = \frac{1}{120}.$

Estas expressões parecem nos indicar que

$$a_{2n} = \frac{1}{n!}.$$

Confirmemos usando Indução Finita.

Já vimos que para $n = 0$ *temos* $a_0 = 1 = \dfrac{1}{0!}$.

Suponhamos que $a_{2k} = \dfrac{1}{k!}$ *para* $k \leq n$. *Calculemos* $a_{2(n+1)} = a_{2n+2}$.

Sabemos que $(2n+1)(2n+2)a_{2n+2} - (2(2n)+1)a_{2n} = \dfrac{1}{n!}$

Usando a hipótese de indução teremos

$$(2n+1)(2n+2)a_{2n+2} - (2(2n)+1)\frac{1}{n!} = \frac{1}{n!}$$

$$2(2n+1)(n+1)a_{2n+2} = (2(2n)+1)\frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} = (4n+2)\frac{1}{n!} = 2(2n+1)\frac{1}{n!}$$

$$a_{2n+2} = \frac{1}{(n+1)!}$$

Logo para $n \geq 0$ *temos* $a_{2n+1} = 0$, $a_{2n} = \dfrac{1}{n!}$, *e portanto a solução do problema de valor inicial é* $x(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\underline{2n}} t^{\overline{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{n!}$, *o que neste caso nos dá*

$$x(t) = e^{t^2}.$$

Observação II.17. *Na maioria das vezes não conseguimos expressar uma fórmula geral para* a_n.

Observação II.18. *Mesmo conhecendo a fórmula geral dos* a_n, *nem sempre será possível expressar* $x(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ *em termos de funções elementares.*

II.7 AULA 17 - SÉRIES BINOMIAIS.

Nosso objetivo agora é obter a série de Maclaurin de $f(x) = (1+x)^\alpha$ *onde* $\alpha \in \mathbb{R}$. *É lógico que para* $\alpha = 0, 1, 2, 3, \cdots$, $f(x)$ *será um polinômio cuja série de Maclaurin será ele mesmo:*

$f(x) = (1+x)^0 = 1,$

$f(x) = (1+x)^1 = 1 - x,$

$f(x) = (1+x)^2 = 1 + 2x + x^2, \quad \cdots$

$f(x) = (1+x)^k = 1 + kx + \dfrac{k(k-1)}{2}x^2 + \cdots + x^k =$

$$1 + \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} k \\ 3 \end{pmatrix} x^3 + \cdots + \begin{pmatrix} k \\ k-1 \end{pmatrix} x^{k-1} + \begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix} x^k \tag{16}$$

onde, para $0 \leq n \leq k$,

$$\begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} = \frac{k!}{n!(k-n)!} = \frac{[k-(n-1)][k-(n-2)]\cdots(k-2)(k-1)k}{n!}, \quad \textit{para} \quad 0 \leq n \leq k \tag{17}$$

e em particular

$$\begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} = k \quad e \quad \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix} = 1$$

Assim para $k = 1, 2, \cdots$

$$(1+x)^k = 1 + \sum_{n=1}^{k} \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} x^n \tag{18}$$

que é conhecida por Binômio de Newton.

Note que em particular vemos uma série fazendo

$$(1+x)^k = 1 + \sum_{n=1}^{k} \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} x^n + \sum_{n=k+1}^{\infty} 0\ x^n, \ \textit{para}\ k = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

Já vimos que para $k = -1$ *temos*

$$(1+x)^{-1} = \frac{1}{(1+x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad \textit{para} \quad |x| < 1$$

e no Exercício II.1 calculamos a série de Maclaurin de $(1+x)^{-k}$ *para* $k = 1, 2, \cdots$.

Nosso intuito agora é descobrir a série de Maclaurin de $f(x) = (1+x)^\alpha$ *para* $\alpha \neq 0, 1, 2, 3 \cdots$ *o que denominaremos de Série Binomial. Por exemplo, qual a série de Maclaurin de* $f(x) = (1+x)^{1/2} = \sqrt{1+x}$?

Usando a definição, a série de Maclaurin de $f(x) = (1+x)^\alpha$ *é dada por* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

$f(x) = (1+x)^\alpha \Rightarrow f(0) = 1.$

$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \Rightarrow f'(0) = \alpha.$

$f''(x) = (\alpha-1)\alpha(1+x)^{\alpha-2} \Rightarrow f''(0) = (\alpha-1)\alpha.$

$f'''(x) = (\alpha-2)(\alpha-1)\alpha(1+x)^{\alpha-3} \Rightarrow f'''(0) = (\alpha-2)(\alpha-1)\alpha$

$\vdots$

$f^{(n)}(0) = [\alpha-(n-1)][(\alpha-(n-2)]\cdots[\alpha-2][\alpha-1]\alpha.$

Veja que como $\alpha \neq 0, 1, 2, \cdots$ *as derivadas de quaisquer ordens de* f *nunca se anularão em* $x = 0$ *e portanto teremos uma série com todas as potências* x^n .

Escrevendo a série de Maclaurin de $f(x) = (1+x)^\alpha$ *obtemos*

$$s_f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{[\alpha-(n-1)][(\alpha-(n-2)]\cdots[\alpha-2][\alpha-1]\alpha}{n!} \right] x^n$$

Inspirados na notação (17), vamos definir:

$$\left(\begin{array}{c} \alpha \\ n \end{array} \right) = \frac{[\alpha-(n-1)][(\alpha-(n-2)]\cdots[\alpha-2][\alpha-1]\alpha}{n!}, \text{ onde em particular } \left(\begin{array}{c} \alpha \\ 1 \end{array} \right) = \alpha.$$

Com isto reescrevemos

$$s_f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\begin{array}{c} \alpha \\ n \end{array} \right) x^n, \text{ onde temos } a_n = \left(\begin{array}{c} \alpha \\ n \end{array} \right)$$

Observe também que

$$\left(\begin{array}{c} \alpha \\ n+1 \end{array} \right) = \frac{[\alpha-[(n+1)-1]][\alpha-(n-1)][(\alpha-(n-2)]\cdots[\alpha-2][\alpha-1]\alpha}{(n+1)!} = \left(\frac{\alpha-n}{n+1}\right) \left(\begin{array}{c} \alpha \\ n \end{array} \right) \tag{19}$$

Assim, segue do Critério Inverso da Razão que qualquer que seja $\alpha \neq 1, 2, \ldots,$ *se* $a_n = \left(\begin{array}{c} \alpha \\ n \end{array} \right)$ *então a correspondente série* $s_f(x)$ *tem raio de convergência* R *dado por*

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \left| \frac{n+1}{\alpha-n} \right| \to 1 = R$$

Para ver que tal série é de fato $f(x) = (1+x)^\alpha$, para $|x| < 1$, mostraremos que $s_f(x)$ e $f(x)$ são soluções do mesmo problema de valor inicial, a saber,

$$\begin{cases} (1+x)S'(x) - \alpha S(x) = 0 \\ S(0) = 1. \end{cases} \tag{20}$$

Claramente $f(x) = (1+x)^\alpha$ é solução deste problema. Mostremos que $s_f(x)$ também o é. Primeiramente temos $s_f(0) = 1$, portanto satisfaz a condição inicial do problema.

Como a $s_f(x)$ é função derivável em $(-1,1)$, derivando-a termo a termo temos que

$$s'_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \begin{pmatrix} \alpha \\ n \end{pmatrix} x^{n-1} = \alpha + \sum_{n=2}^{\infty} n \begin{pmatrix} \alpha \\ n \end{pmatrix} x^{n-1} = \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \begin{pmatrix} \alpha \\ n+1 \end{pmatrix} x^n$$

Logo usando estas últimas igualdades e (19) temos que

$$(1+x)s'_f(x) = s'_f(x) + xs'_f(x) = \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \begin{pmatrix} \alpha \\ n+1 \end{pmatrix} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n \begin{pmatrix} \alpha \\ n \end{pmatrix} x^n =$$

$$\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+1) \begin{pmatrix} \alpha \\ n+1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} \alpha \\ n \end{pmatrix} \right] x^n$$

Assim

$$(1+x)s'_f(x) - \alpha s_f(x) =$$

$$\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+1) \begin{pmatrix} \alpha \\ n+1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} \alpha \\ n \end{pmatrix} \right] x^n - \alpha - \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \alpha \\ n \end{pmatrix} x^n =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+1) \begin{pmatrix} \alpha \\ n+1 \end{pmatrix} + (n-\alpha) \begin{pmatrix} \alpha \\ n \end{pmatrix} \right] x^n \overset{(19)}{=} 0$$

Assim tanto $s_f(x)$ quanto $f(x)$ são soluções do mesmo problema de valor inicial. Logo pelo Teorema de Existência e Unicidade de equações diferenciais ordinárias elas coincidem, isto é,

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \alpha \\ n \end{pmatrix} x^n \quad \textit{para} \quad |x| < 1 \quad \textit{e qualquer} \quad \alpha \neq 0, 1, 2, \cdots}$$

$$\textit{onde} \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ n \end{pmatrix} = \frac{[\alpha - (n-1)][(\alpha - (n-2)] \cdots (\alpha - 2)(\alpha - 1)\alpha}{n!} \quad \textit{e} \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha.$$

Veja que esta expressão está em conformidade com outras séries conhecidas.

Por exemplo, já sabemos que $f(x) = (1+x)^{-1} = \dfrac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n$. *Usando a fórmula encontrada para séries binomiais, quando* $\alpha = -1$ *temos* $(1+x)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\begin{pmatrix} -1 \\ n \end{pmatrix} x^n$.

Mas $\begin{pmatrix} -1 \\ n \end{pmatrix} = \dfrac{(-1)(-2)(-3)\cdots(-n)}{n!} = \dfrac{(-1)^n(1)(2)(3)\cdots(n)}{n!} = (-1)^n$, *como esperávamos.*

Exercício II.6. *Encontre a representação de* $(1+x)^{-2}$ *usando série binomial e derivando-se a série de Maclaurin de* $(1+x)^{-1}$. *Compare-as.*

Exemplo II.24. *Escrevendo* $f(x) = \sqrt{1+x}$ *em série de Maclaurin:*

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ n \end{pmatrix} x^n.$$

Com a ajuda de (19) calculamos algumas parcelas desta série

$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}$,

$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix} = \left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1/2-1}{2}\right) = \dfrac{-1}{8}$,

$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix} = \left(\dfrac{-1}{8}\right)\left(\dfrac{1/2-2}{3}\right) = \dfrac{1}{16}$,

$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 4 \end{pmatrix} = \left(\dfrac{1}{16}\right)\left(\dfrac{1/2-3}{4}\right) = \dfrac{-5}{128}\cdots$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \cdots \quad \textit{para} \quad |x| < 1.$$

Exercício II.7. *Encontre o valor aproximado para* $\sqrt{1.3}$, *com erro inferior a* $E = 0.02$. *(Recorde o Teorema da Série Alternada).*

Exercício II.8. *Com base no exemplo anterior, escreva em série de Maclaurin, as funções abaixo, dando também o raio de convergência de cada série encontrada:*

- $f(x) = \sqrt{1+4x^2}$.

- $g(x) = \sqrt{1-x^2}$.

- $g'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

- $h(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{1-9t^2}dt$.

Exercício II.9. *a) Considere a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\begin{array}{c} \alpha \\ n \end{array} \right) x^n$ *onde* $0 < \alpha < 1$ *e* $0 < x < 1$*. Mostre que esta série satisfaz os Critérios de Leibniz.*

b) Determine uma aproximação, com erro inferior a 10^{-3}*, de* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\begin{array}{c} 1/3 \\ n \end{array} \right) \frac{1}{4^n}$.

II.8 Lista 3 de Exercícios - Séries de Potências - Séries de Taylor.

1. *Determine os intervalos de convergência das séries abaixo:*

   a) $\sum \frac{x^n}{n^2}$ *b)* $\sum e^{nx}$ *c)* $\sum 2^n x^n$ *d)* $\sum x^n sen\frac{1}{n}$ *e)* $\sum(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ *f)* $\sum \left(\frac{x^2-1}{x^2+4}\right)^{2n}$

2. *Verifique que as séries abaixo convergem absolutamente nos intervalos dados:*

   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ *em* $[-r; r]$, $\forall r > 0$. *b)* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k$ *em* $[-r; r]; 0 < r < 1/2$

   c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2k+1}$ *em* $[-r; r]; 0 < r < 1$.

3. *Suponha que a série* $\sum(-1)^n a_n 4^n$ *convirja e que* $\sum a_n 6^n$ *divirja. O que pode ser dito sobre a convergência ou divergência das seguintes séries*

   a) $\sum a_n$ *b)* $\sum a_n 8^n$ *c)* $\sum(-1)^n a_n 3^n$ *d)* $\sum(-1)^n a_n 9^n$

4. *Seja* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2^n a_n$, $a_n > 0$, *uma série condicionalmente convergente. Encontre o intervalo de convergência da série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. *Justifique a sua resposta.*

5. *Determine o intervalo de convergência das séries de potências abaixo:*

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+n+1}{n^4+1} x^n$ *c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{2n}$ *d)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n x^n$

   e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n x^n}{n+1}$ *f)* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n}$ *g)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n n^n$. *h)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (k+1) x^k$ *i)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n^3}$

6. *Determine os intervalos de convergência das séries abaixo e diga em qual valor elas estão centradas:*

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^3 (x-4)^n$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+n+1}{n^4+1} (x+3)^n$ *c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(3x+6)^n$

   d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (2x-6)^{2n}$ *e)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^3 (\frac{2x-4}{3})^n$.

7. *Seja* $s(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)x^k$. *Verifique que para todo* $t\in]-1;1[$ *tem-se* $\int_0^t s(x)dx=\frac{t^2}{1-t}$.

   Conclua então que se $x\in]-1;1[$ *temos* $\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)x^k=\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}$.

8. *a) Considere a função* $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n^3}$ *e então descreva seu domínio.*

   b) Justifique em que intervalo vale a igualdade $f'(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)x^{n-2}}{n^3}$.

9. *Use a definição para determinar as séries de Maclaurin das funções abaixo fornecendo seus intervalos de convergência:*

   a) $f(x)=e^{2x}$ *b)* $f(x)=3x^3-4x^2-7x-1$ *c)* $f(x)=sen\ x$ *d)* $f(x)=cos\ x$
   e) $f(x)=\frac{1}{1-x}$.

10. *I) Antes de começar o exercício liste as quatro séries de Maclaurin das funções mais vistas em sala de aula, dando seus respectivos raios de convergências.*

    II) Determine as séries de Maclaurin e seus raios de convergência das funções abaixo, **utilizando as séries e raios de convergência** *das funções do item I).*

a) $f(x)=3-x^2+7x^4-x^5$	*b)* $f(x)=\frac{x}{1-x^3}$	*c)* $f(x)=\frac{x^2}{1+x^3}$
d) $f(x)=ln(1+2x)$	*e)* $f(x)=x^2ln(1+2x)$	*f)* $f(x)=\arctan x$
g)$f(x)=xe^{x^2}$	*h)* $f(x)=cos^2x$	*i)* $f(x)=x^2\,\mathrm{sen}\,x$
j) $f(x)=e^{x^2}-x$	*k)* $f(x)=\mathrm{sen}\,x\cos 2x$	*l)* $f(x)=(1+x^2)\cos x$
m) $f(x)=\cosh x$	*n)* $f(x)=\mathrm{senh}\,x$	*o)* $f(x)=\ln(1-x)$
p) $f(x)=(1-x)\ln(1+x)$	*q)* $f(x)=\arctan x^2$	*r)* $f(x)=(1-x^2)^{-1}$

11. *Determine* $f^{(7)}(0)$ *para cada uma das funções do exercício 10) usando somente os coeficientes da séries lá determinadas.*

12. *Expresse as séries abaixo através de um somatório. Então, inspirados nas séries de Mclaurin conhecidas das quatro funções elementares MAIS DISCUTIDAS em sala de aula, verifique para quais valores S as séries dadas convergem. JUSTIFIQUE. OBS. Cada uma das séries abaixo é o valor de uma série conhecida avaliada num ponto específico.*

a) $S = \frac{-1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{-1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots$.

b) $S = 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{9} + \frac{4}{27} + \frac{5}{81} + \ldots$.

c) $S = \frac{1}{3} + \frac{1}{9 \cdot 2!} + \frac{1}{27 \cdot 3!} + \frac{1}{81 \cdot 4!} + \ldots$.

d) $S = \frac{1}{2.2!} + \frac{1}{4.3!} + \frac{1}{8.4!} + \frac{1}{16.5!} \ldots$.

e) $S = \frac{e}{3} - \frac{e^2}{3^2 2} + \frac{e^3}{3^3 3} - \frac{e^4}{3^4 4} + \frac{e^5}{3^5 5} \ldots$.

f) $S = \frac{-\pi^2}{4^2 \cdot 2!} + \frac{\pi^4}{4^4 \cdot 4!} + \frac{-\pi^6}{4^6 \cdot 6!} + \ldots$.

13. *A) Com base nas séries de Maclaurin das funções mais discutidas em sala de aula, e de suas propriedades, escreva a série de Maclaurin das funções abaixo,* **sem usar a definição***:*

    a) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x^2}{x^2}$ *b)* $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ *c)* $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$

    d) $f(x) = \dfrac{\ln(1+x) - x}{x}$ *e)* $f(x) = \dfrac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^3}$ *f)* $f(x) = \dfrac{\cos\ x - 1}{x^2}$

    g) $f(x) = \dfrac{e^{x^2} - 1 - x^2}{x^4}$

    B) **Com base nos coeficientes das séries encontradas no item A)** *determine* $f(0)$.

    C) Com base nos coeficientes das séries encontradas em A) determine $f^{(3)}(0)$, *sem efetuar cálculo algum.*

    D) Com base nos coeficientes encontrados, esboce o gráfico das funções acima numa vizinhança de $x_0 = 0$.

14. *Determine a série de Taylor de* $f(x) = senx$ *em torno de* $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

15. *a) Use a série de Maclaurin de* $f(x) = e^x$ *para então deduzir como é a série de Taylor de* f *em torno de* $x_0 = 1$.

    b) Use a série de Maclaurin de $f(x) = \frac{1}{1-x}$ *para deduzir como é a série de* $f(x) = \frac{1}{x}$ *em torno de* $x_0 = 1$.

    c) Use a série de Maclaurin de $f(x) = e^x$ *para deduzir a série de Taylor em torno de* $x_0 = 0$ *de* $f(x) = (1 - x^2)e^{-x^2}$

16. *Para as funções e* x_0 *do exercício anterior encontre* $f^{(45)}(x_0)$.

17. *a) Encontre a série de Maclaurin (série de Taylor centrada na origem) da função*

$$f(x) = x^2 e^{-x^2}.$$

b) Encontre $f^{(10)}(0)$ *e* $f^{(11)}(0)$.

c) Utilizando a estimativa de erro das séries alternadas mostre que

$$\left|\int_0^1 x^2 e^{-x^2}\,dx - \frac{2}{15}\right| < \frac{1}{14}.$$

18. *Mostre que para* $|x| < 1$ *tem-se* $ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

19. *Recordando a teoria de erro em séries alternadas, determine o valor das expressões abaixo com erro inferior a* 0.01 *:*

    a) $\int_0^{1/2} e^{-t^3}dt$ *b)* $\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} t}{t}dt.$ *c)* $\int_0^1 \cos\sqrt{t}\ dt$

20. *Use série de potências para calcular as seguintes integrais.*

$$a)\quad \int_0^{1/5}\frac{1}{1+x^4}dx \qquad b)\quad \int_0^{1/2}\arctan x^2 dx$$

$$c)\quad \int_0^{1/3} x^2\arctan x^4 dx \qquad d)\quad \int_0^{1/2}\ln\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)dx$$

21. *Aproxime as funções abaixo pelo seu polinômio de Taylor de grau* 3 *em torno de* $x_0 = 0$ *no intervalo* $[-1/2, 1/2]$ *e calcule o erro máximo cometido ao fazer tal aproximação, neste intervalo. Repita o exercício para o polinômio de Taylor de grau* 4.

    a) $f(x) = e^x$, *b)* $f(x) = e^{x^2}$, *c)* $f(x) = cosx$, *d)* $f(x) = (1+x)^{-3}$.

22. *Use a expansão em Série de Taylor de* $f(y) = e^y$ *para concluir a fórmula de Euler:*

$$e^{ix} = cosx + isenx \quad onde \quad i = \sqrt{-1}.$$

23. *Use a série binomial para encontrar a série de Maclaurin e respectivo raio de convergência de*

    a) $f(x) = (1-x)^{-3}$ *b)* $f(x) = (1-x)^{2/3}$

    c) $f(x) = -(1-x)^{-1/3}$ *d)* $f(x) = (1+9x^2)^{-1/2}$.

24. *Use séries binomiais para obter a série de Maclaurin de*

    a) $f(x) = arc\ senx$. *Estime o valor de* $arc\ sen(0.2)$ *com erro inferior a* $0,1$.

b) $f(x) = \sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$. *Estime o valor de* $\sinh^{-1}(0.1)$. *Sugestão: Derive* $f(x)$.

25. *Mostre que* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 1/3 \\ n \end{pmatrix} \frac{1}{4^n}$ *satisfaz o Critério de Leibniz.*

26. *Mostre que* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 1/2 \\ n \end{pmatrix} \frac{3^n}{10^n(3n+1)}$ *satisfaz o Critério de Leibniz. Então, determine uma aproximação, com erro inferior a* 10^{-10} *de tal série.*

27. *Determine uma aproximação de* $\displaystyle\int_0^{3/10} \sqrt{1 + x^3}\, dx$ *com erro inferior a* 10^{-10}.

28. *Encontre o domínio da função (de Bessel de ordem 0) dada por* $J_0(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$.
Verifique que J_0 *satisfaz:* $x^2 J_0''(x) + x J_0'(x) + x^2 J_0(x) = 0$.

29. *Use séries de potências para determinar as soluções* $y(x)$ *dos problemas abaixo(retome o Exercício 17 da Lista 1):*

a) $y' = 2xy, \quad y(0) = 1$.

b) $y' + 2y = 0 \quad y(0) = 1$.

c) $y' - y = e^x, \quad y(0) = 0$.

d) $y'' + y = 0$ *onde* $y(0) = 0$ *e* $y'(0) = 1$.

e) $y'' + y = x$ *onde* $y(0) = 0$ *e* $y'(0) = 1$.

f) $y'' + y = 2e^x$ *onde* $y(0) = y'(0) = 1$.

g) $y'' - y = 2e^x$ *onde* $y(0) = 0$ *e* $y'(0) = 1$.

h) $y'' + xy' + y = 0$ *onde* $y(0) = 0$ *e* $y'(0) = 1$.

i) $2y'' + xy' + y = 0$ *onde* $y(0) = 1$ *e* $y'(0) = 0$.

Capítulo III

Séries de Fourier

III.1 Aula 18 - Introdução às Séries de Fourier

Até agora estudamos séries de potências

$$f(x) = \sum_{n=-}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad \textit{para} \quad x \in I =]x_0 - R, x_0 + R[$$

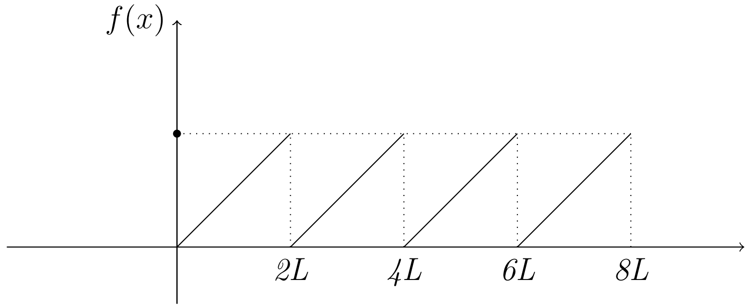
onde $R > 0$ *ou* $R = \infty$ *e que, entre outras coisas, se destacam por serem infinitamente deriváveis em* I *e trazerem a "radiografia" de* f *no ponto* x_0.

Agora vamos estudar as funções que podem ser representadas através de

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right]}$$

onde (a_n) *e* (b_n) *são sequências numéricas dadas e* $L > 0$. *Tais séries são denominadas Séries trigonométricas ou Séries de Fourier.*

Estas séries, quando convergentes, representam funções $2L-$*periódicas e podem ser descontínuas, diferente do que ocorre com as séries de potências.*



Tais séries aparecerão em processos lineares de difusão(equação do calor), ondas sonoras, transmissão de sinais, etc como veremos adiante.

Antes porém, recordemos alguns fatos referentes à periodicidade e paridade de funções.

III.1.1 Periodicidade de funções

Definição III.1.1. *Dizemos que uma função é* $2L-$*periódica,* $0 \neq L \in \mathbb{R}$ *se*

$$f(x+2L) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exemplo III.1.

- $f(x) = 1$ *é periódica de qualquer período* $2L$.
- $f(x) = senx, cosx$ *são* $2\pi-$ *periódicas.*
- *(Onda quadrada)* $f(x) = \begin{cases} 1 \ \ se \ x \in [(2n-1)L, 2nL), \ \forall n \\ 0 \ \ se \ x \in [2nL, (2n+1)L), \ \forall n \end{cases}$ *e* $2L$ *periódica*

Proposição III.1.2. *Sejam* $f(x)$ *e* $g(x)$ *funções* $2L-$*periódicas. Então*

a) $f(x) \pm g(x)$ *e* $f(x)g(x)$ *também o são.*

b) $f(\alpha x)$ *é* $\dfrac{2L}{\alpha}-$ *periódica para todo* $\alpha \neq 0$.

c) $f(x)$ *também é* $2Ln-$*periódica para todo* $n \in \mathbb{Z}$.

Prova: *De fato,*

a) se $h(x) = f(x) + g(x)$ *então*

$$h(x+2L) = f(x+2L) + g(x+2L) \underset{periódicas}{\overset{f,g}{=}} f(x) + g(x) = h(x)$$

Exercício: $f(x)g(x)$ *é* $2L-$*periódica.*

b) Seja $h(x) = f(\alpha x)$ *para* $\alpha \neq 0$. *Então*

$$h(x+\frac{2L}{\alpha}) = f(\alpha(x+\frac{2L}{\alpha}) = f(\alpha x+2L)) \underset{2L periódica}{\overset{f}{=}} f(\alpha x) = h(x).$$

c) $f(x+2L) = f(x)$ *para todo* x. *Mostraremos primeiramente que* $f(x+n2L) = f(x)$ *para* $n > 0$ *e depois que* $f(x-2nL) = f(x)$. *Por Indução, sabemos que* $f(x+2L) = f(x)$ *para todo* x. *Suponhamos* $f(x+2nL) = f(x)$. *Logo* $f(x+(n+1)2L) = f((x+n2L)+2L)) \underset{periódica}{\overset{f\, é\, 2L}{=}} f(x+n2L) \overset{indução}{=} f(x)$. *Além disso,* $f(x-2nL) = f(x-2nL+2nL) = f(x)$ *para todo* n, *como queríamos.*

Observação III.1. *Se* f *é periódica não constante, denominamos de período fundamental de* f *o menor* $2L > 0$ *tal que* $f(x+2L) = f(x)$ $\forall x$.

Exemplo III.2.

- *Sejam* $f(x) = senx$ *com período fundamental* 2π. *Então pelo item c),* f *também é* -6π *periódica, bem como* 10π *periódica.*
- *Definindo-se* $g(x) = sen\frac{\pi x}{L}$, *pelo item b) concluímos que ela é* $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{L}} = 2L$ *periódica.*
- *Assim como* $sen\frac{5\pi x}{L}$ *é* $\frac{2\pi}{\frac{5\pi}{L}} = \frac{2L}{5}$ *periódica.*
- *De modo geral, as funções da forma* $sen\frac{n\pi x}{L}$ *bem como,* $cos\frac{n\pi x}{L}$, *têm período fundamental* $\frac{2L}{n}$. *Mas o item c) nos dá que todas elas são também* $n \cdot \frac{2L}{n} = 2L$ *periódicas.*

  Deste modo para todo $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ *e todo* $k \in \mathbb{R}$ *temos de a) e b) que*

$$f_k(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{k} a_n cos\frac{n\pi x}{L} + b_n sen\frac{n\pi x}{L} \quad \text{é uma função} \quad 2L\text{periódica.}$$

  Com isto concluímos que

Teorema III.1.3. *Se* $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\frac{n\pi x}{L} + b_n sen\frac{n\pi x}{L}$ *então* f *é* $2L$ *periódica.*

III.1.2 Funções pares - Funções ímpares

Outros fatos que serão muito usados no decorrer deste capítulo, são as propriedades das funções pares e das funções ímpares.

Definição III.1.4. *Seja* $f : I =]-a, a[\to R$, *onde* $a > 0$ *ou* $a = \infty$. *Dizemos que*

a) $f(x)$ *é uma função par se* $f(-x) = f(x)$ *para todo* $x \in I$,

b) $f(x)$ *é uma função ímpar se* $f(-x) = -f(x)$ *para todo* $x \in I$.

Exemplo III.3. *a) As funções* $f(x) = 1$, $f(x) = |x|$, $f(x) = x^{2n}$, $f(x) = cosx$ *são exemplos de funções pares.*

b) As funções $f(x) = x^{2n+1}$, $f(x) = senx$ *são exemplos de funções ímpares.*

c) $f(x) = 1 + x - x^2$ *não é função par nem ímpar.*

d) $f(x) = 0$ *é função par e ímpar simultaneamente. Existe outra nestas condições ?*

Exercício III.1. *Toda função* $f(x)$ *definida na reta é soma de uma função par com uma função ímpar.*

Proposição III.1.5. *Sejam* $f, g : I =]-a, a[\to R$, *onde* $a > 0$ *ou* $a = \infty$. *Então:*

a) Se f *e* g *são funções pares em* I *então* $f \pm g$ *também o é.*

b) Se f *e* g *são funções ímpares em* I *então* $f \pm g$ *também o é.*

c) Se f *e* g *são funções pares em* I *então* $f \cdot g$ *também o é.*

d) Se f *e* g *são funções ímpares em* I *então* $f \cdot g$ *é par em* I.

e) Se f *é par e* g *é ímpar em* I *então* $f \cdot g$ *é ímpar em* I.

f) Se f *é par e integrável em* $[-a, a]$ *então* $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.

g) Se f *é ímpar e integrável em* $[-a, a]$ *então* $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Prova: *d). Assim seja $h(x) = f(x)g(x)$. Então*

$$h(-x) = f(-x)g(-x) \underset{\text{ímpares}}{\overset{f,g}{=}} = (-f(x)) \cdot (-g(x)) = f(x)g(x) = h(x).$$

Para f) e g) basta notar que $\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(-x)dx$. *Logo*

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} [f(-x) + f(x)]dx.$$

Exemplo III.4. *As propriedades f) e g) facilitam muito os cálculos de integrais definidas em intervalos simétricos. Por exemplo,*

$$\int_{-1}^{1} \overbrace{7}^{par} \underbrace{-6x + 8x^3 - 15x^9 + 4x^4 senx + sen^3 x cos^2 x}_{ímpar} dx = 2\int_{0}^{1} 7dx = 14.$$

Estas propriedades serão fundamentais no estudo da ortogonalidade das funções $f_0(x) = 1,\ f_n(x) = cos\frac{n\pi x}{L}$ *e* $g_n(x) = sen\frac{n\pi x}{L}$.

Definição III.1.6. *Sejam $f, g : [a, b] \in \mathbb{R}$ funções integráveis no intervalo $[a, b]$. Definimos o produto interno de f por g como sendo:*

$$\boxed{\langle f, g\rangle = \int_{a}^{b} f(x)g(x)\ dx.}$$

Inspirados em Álgebra linear, diremos que

a) f é ortogonal a g no intervalo $[a, b]$, o que denotaremos por $f \perp g$, se

$$\boxed{\langle f, g\rangle = 0}$$

b) Além disso, denotaremos o quadrado da norma de uma função f por

$$\boxed{||f||^2 = \langle f, f\rangle = \int_{a}^{b} f^2(x)dx.}$$

Seja $\mathcal{O}$ um conjunto de funções integráveis $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Diremos que $\mathcal{O}$ é conjunto ortogonal em $[a, b]$ se quaisquer que sejam $f \neq g$ em $\mathcal{O}$ tem-se $f \perp g$ em $[a, b]$.

Com base nestas definições temos:

Teorema III.1.7. *Seja $L > 0$. Então*

$$\mathcal{O} = \{1, cos\frac{n\pi x}{L}, sen\frac{n\pi x}{L}, \quad para \quad n = 1, 2, 3 \cdots\}$$

é conjunto ortogonal de funções em $[-L, L]$.

Prova: *Seja $n \in \{1, 2, 3, \cdots\}$. Então:*

- $\left\langle 1, cos\frac{n\pi x}{L}\right\rangle = \int_{-L}^{L} 1 \cdot cos\frac{n\pi x}{L} dx \overset{par}{=} 2\int_0^L cos\frac{n\pi x}{L} dx = \left(sen\frac{n\pi x}{L}\right)\frac{L}{n\pi}\Big]_0^L = 0$

- $\left\langle 1, sen\frac{n\pi x}{l}\right\rangle = 0$. *(Trivial por que?)*

  Para $n, m = 1, 2, 3, \cdots$ temos

- $\left\langle \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}, \cos\frac{m\pi x}{L}\right\rangle = \int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \cdot \cos\frac{m\pi x}{L} dx \overset{ímpar}{=} 0.$

- $\left\langle sen\frac{n\pi x}{L}, sen\frac{m\pi x}{L}\right\rangle = \int_{-L}^{L} sen\frac{n\pi x}{L} \cdot sen\frac{m\pi x}{L} dx \overset{par}{=} 2\int_0^L sen\frac{n\pi x}{L} \cdot sen\frac{m\pi x}{L} dx$

  Se $n \neq m$ temos

$$2\int_0^L sen\frac{n\pi x}{L} \cdot sen\frac{m\pi x}{L} dx = \int_0^L \left[cos\left(\frac{(n-m)\pi x}{L}\right) + cos\left(\frac{(n+m)\pi x}{L}\right)\right] dx = 0$$

  Mas se $n = m$ temos

$$2\int_0^L sen\frac{n\pi x}{L} \cdot sen\frac{n\pi x}{L} dx = \int_0^L \left[1 + cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\right] dx = L$$

  Assim

$$\left\langle sen\frac{n\pi x}{L}, sen\frac{m\pi x}{L}\right\rangle = \int_{-L}^{L} sen\frac{n\pi x}{L} \cdot sen\frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0 & se \quad n \neq m \\ L & se \quad n = m \end{cases}$$

- *De modo inteiramente análogo termos que*

$$\left\langle cos\frac{n\pi x}{L}, cos\frac{m\pi x}{L}\right\rangle = \int_{-L}^{L} sen\frac{n\pi x}{L} \cdot sen\frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0 & se \quad n \neq m \\ L & se \quad n = m \end{cases}$$

- *E por fim* $\left\langle sen\frac{n\pi x}{L}, cos\frac{m\pi x}{L}\right\rangle =^{ímpar} 0.$

Para fixar as idéias temos:

$$\boxed{\left\langle sen\frac{n\pi x}{L}, sen\frac{m\pi x}{L}\right\rangle = \int_{-L}^{L} sen\frac{n\pi x}{L}\cdot sen\frac{m\pi x}{L}dx = \begin{cases} 0 \quad se \quad n \neq m \\ L \quad se \quad n = m \end{cases}}$$

$$\boxed{\left\langle cos\frac{n\pi x}{L}, cos\frac{m\pi x}{L}\right\rangle = \int_{-L}^{L} cos\frac{n\pi x}{L}\cdot cos\frac{m\pi x}{L}dx = \begin{cases} 0 \quad se \quad n \neq m \\ L \quad se \quad n = m \end{cases}}$$

$$\boxed{\left\langle sen\frac{n\pi x}{L}, cos\frac{m\pi x}{L}\right\rangle = \int_{-L}^{L} sen\frac{n\pi x}{L}\cdot cos\frac{m\pi x}{L}dx = 0, \ \ para\ todo\ m, n}$$

$$\boxed{||sen\frac{n\pi x}{L}||^2 = L = ||cos\frac{n\pi x}{L}||^2.}$$

$$\boxed{||1||^2 = 2L}$$

Com vistas nas aplicações que veremos adiante, trabalharemos com Séries de Fourier de funções integráveis num intervalo $[-L, L]$, *e para isso o conjunto* $\mathcal{O}$ *será de fundamental importância.*

III.2 Aula 19 - Coeficientes de Séries de Fourier

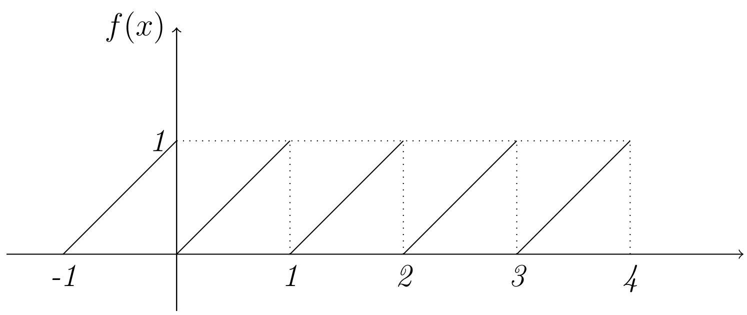
Já sabemos do Teorema Fundamental do Cálculo que toda função contínua num intervalo limitado $[-L, L]$ é integrável. Mas vamos trabalhar com funções mais gerais que estas.

Definição III.2.1. *Uma função f é dita contínua por por partes(ou pedaços) em $\mathbb{R}$ se para todo intervalo $]a, b[\ \in\ \mathbb{R}$ existirem no máximo finitos pontos $x_1, x_2, \cdots x_n$ onde f é descontínua e para cada um destes pontos existirem os limites laterais que denotaremos por*

$$f(x_i+) = \lim_{x \to x_i^+} f(x) \quad e \quad f(x_i-) = \lim_{x \to x_i^-} f(x).$$

Exemplo III.5.

- *Toda função contínua em $\mathbb{R}$ também é contínua por partes em $\mathbb{R}$.*
- $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *não é contínua por pedaços pois apesar de ter apenas uma descontinuidade na reta, não existe* $f(0+) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x}$.
- $f(x) = x - n, \quad para \quad x \in\ ]n, n+1], \quad e \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ *é contínua por pedaços.*



É fácil ver que:

Teorema III.2.2. *Seja f $2L$ periódica e sejam $\{x_1, x_2, \cdots x_n\} \subset\ ]-L, L[$ as únicas descontinuidades de f neste intervalo. Se existem $f(x_i+), f(x_i-), f(L-)$ e $f(-L+)$então f é contínua por pedaços em $\mathbb{R}$.*

Exemplo III.6. *a) Seja $f(x)$uma função 1 periódica e tal que $f(x) = x \quad para \quad x \in]0, 1]$. Então f é contínua por partes em $\mathbb{R}$.(Ver figura acima).*

b) $f(x) = tgx$ não é contínua por partes em $\mathbb{R}$.

Definição III.2.3. *Seja f contínua por partes em $\mathbb{R}$ e sejam $\{x_1, x_2, \cdots x_n\}$ as únicas descontinuidades de f em $]a, b[$. Denominando-se $x_0 = a$ e $x_{n+1} = b$ temos que*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)dx$$

onde, para $i = 0, 1, 2, \cdots n$, $\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = F(x_{i+1}-) - F(x_i+)$ e $F'(x) = f(x)$.

Exemplo III.7. *Seja $f(x) = \begin{cases} x & se \;\; x \geq 0 \\ x+1 & se \;\; x \leq 0 \end{cases}$. Então*

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} (x+1)dx + \int_0^1 xdx = \int_{-1}^{1} xdx + \int_{-1}^{0} 1dx = 1.$$

Recordando Álgebra linear, sabemos que se $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base ortogonal de um espaço vetorial V com produto interno $< \, , \, >$, então qualquer elemento $v \in V$ pode ser escrito através de uma combinação linear

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$$

e além disso, da ortogonalidade de β

$$< v, v_k > = < a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3, v_k > = a_1 < v_1, v_k > + a_2 < v_2, v_k > + a_3 < v_3, v_k > = a_k||v_k||^2,$$

isto é, para $k = 1, 2, 3$ temos

$$a_k = \frac{< v, v_k >}{||v_k||^2}.$$

Inspirados por estas ideias vamos explorar as propriedades do conjunto ortogonal

$$\mathcal{O} = \{1, cos\frac{n\pi x}{L}, sen\frac{n\pi x}{L}, \quad para \quad n = 1, 2, 3 \cdots\} \; para \; L > 0,$$

para definir os coeficientes de Fourier de uma função $2L$ periódica.

Definição III.2.4. *Seja $f(x)$ função $2L$ periódica e contínua por partes em $\mathbb{R}$. Definimos, e denotamos, a série de Fourier de f por*

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\frac{n\pi x}{L} + b_n sen\frac{n\pi x}{L}$$

onde

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)cos\frac{n\pi x}{L}dx \quad e \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)sen\frac{n\pi x}{L}dx.}$$

Estes são chamados de coeficientes de Fourier da f.

Observação III.2. *Em linguagem de produto interno tem-se que os coeficientes de Fourier de f são:*

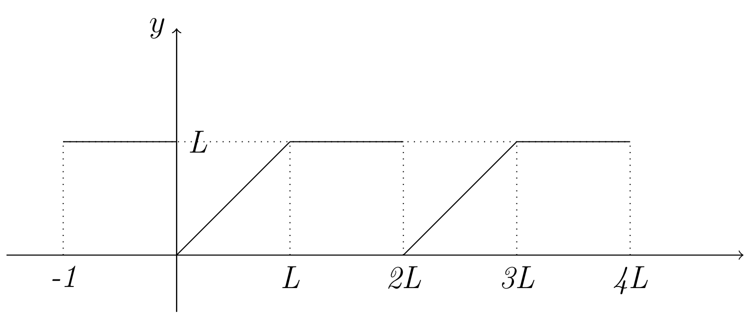
$$\frac{a_0}{2} = \frac{< f, 1 >}{||1||^2}, \quad a_n = \frac{< f, cos\frac{n\pi x}{L} >}{||cos\frac{n\pi x}{L}||^2} \quad e \quad b_n = \frac{< f, sen\frac{n\pi x}{L} >}{||sen\frac{n\pi x}{L}||^2}.$$

Observação III.3. *Note que os coeficientes de Fourier estão muitíssimo bem definidos, uma vez que podemos integrar as funções contínuas por partes* $f(x)$, $f(x)cos\frac{n\pi x}{L}$, $f(x)sen\frac{n\pi x}{L}$.

Observação III.4. *O conjunto $\mathcal{O}$ funciona como uma "base"ortogonal de funções no espaço vetorial das funções $2L$ periódicas e contínuas por partes. Assim uma série de Fourier é uma função deste espaço escrita na base ortogonal $\mathcal{O}$ isto é, como "combinação linear"(infinita) dos elementos desta base.*

Exemplo III.8. • *Seja a função contínua por partes, $2L$ periódica e definida por*

$$f(x) = \begin{cases} x & se\ x \in [0, L], \\ L & se\ x \in]-L, 0[. \end{cases}$$



então

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{0} Ldx + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} xdx = \frac{3L}{2}.$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{0} Lcos\frac{n\pi x}{L}dx + \frac{1}{L}\int_{0}^{L} x\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$= \frac{L}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{L}\Big|_0^L = \frac{L}{n^2\pi^2}[(-1)^n - 1)].$$

Logo

$$a_{2n} = 0 \quad e \quad a_{2n-1} = \frac{-2L}{(2n-1)^2\pi^2} \quad para \quad n = 1, 2, \cdots$$

Além disso

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)sen\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{L}\left[\int_{-L}^{0} Lsen\frac{n\pi x}{L}dx + \int_{0}^{L} xsen\frac{n\pi x}{L}dx\right] = -\frac{L}{n\pi}.$$

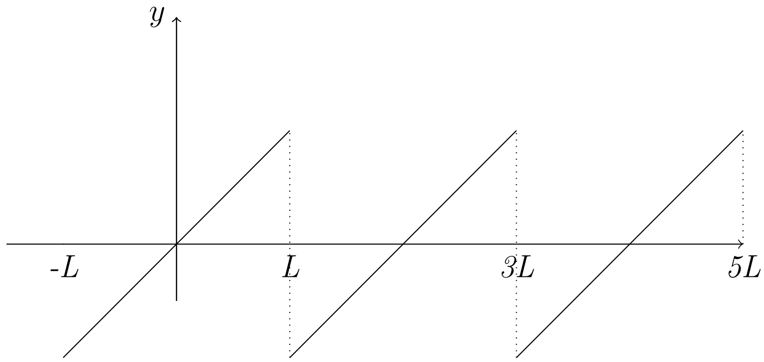
Portanto

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\frac{n\pi x}{L} + b_n sen\frac{n\pi x}{L} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} cos\frac{(2n-1)\pi x}{L} + b_n sen\frac{n\pi x}{L}$$

$$S_f(x) = \frac{3L}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-2L}{(2n-1)^2\pi^2}cos\frac{(2n-1)\pi x}{L} - \frac{L}{n\pi}sen\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad (1)$$

- *Seja $f(x)$ função contínua por partes, $2L$ periódica e definida por, $f(x) = x \quad para \quad x \in\ ]-L, L[$.*

Observe que f é ímpar no intervalo $]-L, L[$ logo seus coeficientes a_0, a_n vão se anular, de fato,



$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} xdx \overset{ímpar}{=} 0.$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} xcos\frac{n\pi x}{L}dx \overset{ímpar}{=} 0.$$

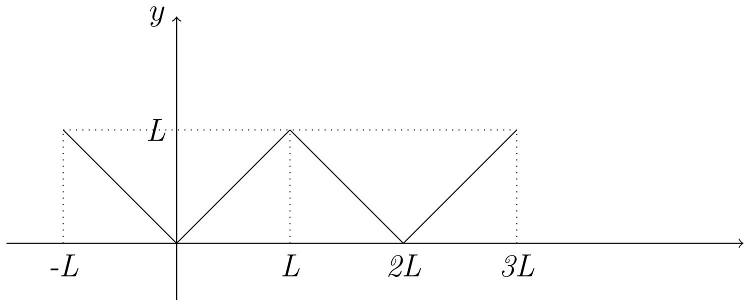
$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} xsen\frac{n\pi x}{L}dx \overset{par}{=}$$

$$\frac{2}{L}\int_{0}^{L} xsen\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{L}\left\{\frac{-Lx}{n\pi}\ cos\frac{n\pi x}{L}\right]_0^L - \int_0^L \frac{-L}{n\pi}cos\frac{n\pi x}{L}dx\right\} = \frac{-2L}{n\pi}(-1)^n.$$

Logo

$$S_f(x) = \frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}sen\frac{n\pi x}{L} \qquad (2)$$

- *Seja a função contínua por partes, $2L$ periódica e definida por $f(x) = |x|$ para $x \in [-L, L]$. Como f é função par em $[-L, L]$ os coeficientes b_n vão se anular, de fato,*



$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} |x| sen\frac{n\pi x}{L} dx \overset{\acute{\imath}mpar}{=} 0.$$

Já

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} |x| dx \overset{par}{=} \frac{2}{L}\int_0^L x dx = L$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} |x| \cos\frac{n\pi x}{L} dx \overset{par}{=} \frac{2}{L}\int_0^L x \cos\frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2L}{n^2\pi^2} \cos\frac{n\pi x}{L}\Big|_0^L = \frac{2L}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right].$$

Logo $a_{2n} = 0$ *e* $a_{2n-1} = \dfrac{-4L}{(2n-1)^2\pi^2}$ *e portanto*

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} cos\frac{(2n-1)\pi x}{L} = \frac{L}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4L)}{\pi^2(2n-1)^2} cos\frac{(2n-1)\pi x}{L} \qquad (3)$$

Os dois últimos exemplos ilustram o resultado abaixo:

Teorema III.2.5. *Seja $f(x)$ função $2L$ periódica e contínua por partes em $\mathbb{R}$. Seja $S_f(x)$ sua série de Fourier. Então:*

a) Se f é função par, $b_n = 0$ para $n = 1, 2, \cdots$ e

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\frac{n\pi x}{L}$$

onde $a_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x) cos\frac{n\pi x}{L}$ *para* $n = 0, 1, 2, \cdots$

b) Se f é função ímpar, $a_n = 0$ para $n = 0, 1, 2, \cdots$ e

$$S_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen\frac{n\pi x}{L}$$

onde $b_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x) sen\frac{n\pi x}{L}$ *para* $n = 0, 1, 2, \cdots$

Prova: *Exercício.*

Observação III.5. *O resultado anterior nos dá algo similar ao observado em séries de potências centradas no $x_0 = 0$. Tanto nestas como nas séries de Fourier as funções pares possuem apenas parcelas de funções pares. Já as ímpares só tem parcelas de funções ímpares.*

Exercício III.2. *Determine a série de Fourier da função 2π periódica e definida por $f(x) = x + |x|$ para $x \in]-L, L[$*

III.3 Aula 20 - Teorema de Fourier

Nosso próximo objetivo é saber quando a série de Fourier de uma função $2L$ periódica e contínua por partes, converge. E se convergir, quando convergirá para a própria função f. Para isso enunciamos o teorema abaixo, cuja prova será omitida.

Teorema III.3.1. *(Teorema de Fourier) Seja $f(x)$ função $2L$ periódica. Suponha que $f(x)$ e sua derivada $f'(x)$ sejam contínuas por partes em $\mathbb{R}$. Então sua série de Fourier*

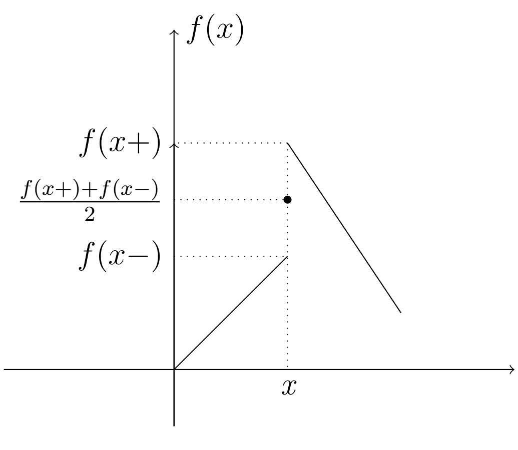
$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\frac{n\pi x}{L} + b_n sen\frac{n\pi x}{L}$$

converge para todo $x \in \mathbb{R}$ para

$$S_f(x) = \begin{cases} f(x) & se \quad f \quad for\ contínua\ em \quad x \\ \dfrac{f(x+)+f(x-)}{2} & se \quad f \quad for\ descontínua\ em \quad x \end{cases}$$

onde $a_0 = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)dx, \quad a_n = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)cos\frac{n\pi x}{L}dx \quad e \quad b_n = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)sen\frac{n\pi x}{L}dx.$

Observação III.6. *Note que quando f é descontínua em x então $\dfrac{f(x+)+f(x-)}{2}$ é a média do salto de f em x.*



Corolário III.3.2. *Se $f(x)$ é função $2L$ periódica contínua em $\mathbb{R}$ e se sua derivada $f'(x)$ for contínua por partes então*

$$f(x) = S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\frac{n\pi x}{L} + b_n sen\frac{n\pi x}{L} \quad \forall x \in \ \mathbb{R}.$$

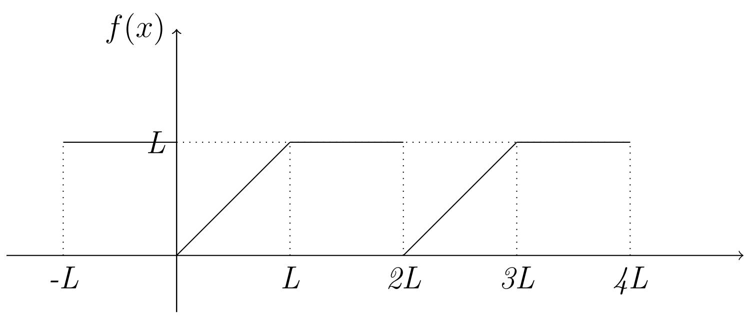
Prova do Corolário: *Basta notar que como f é contínua para todo x temos que*

$$f(x) = f(x+) = f(x-).$$

Exemplo III.9. *Voltemos as funções dadas no Exemplo (III.8).*

- *Vimos que a função $2L$ periódica e contínua por partes*

$$f(x) = \begin{cases} x & se\ x \in [0, L], \\ L & se\ x \in]-L, 0[. \end{cases}$$

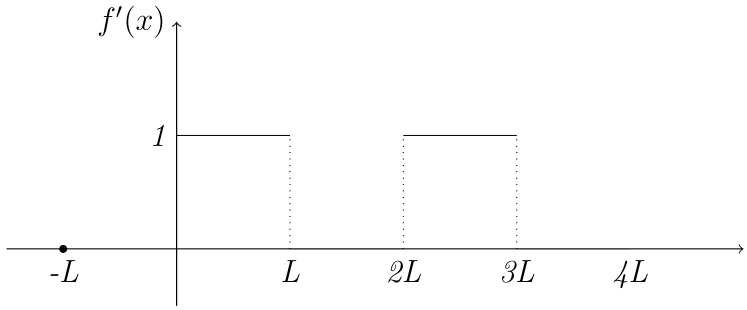


tem série de Fourier

$$S_f(x) = \frac{3L}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2L}{(2n-1)^2\pi^2} cos \frac{(2n-1)\pi x}{L} - \frac{L}{n\pi} sen \frac{n\pi x}{L} \right)$$

Note que como $f(x)$ é $2L$ periódica, $f'(x)$ também o será e assim para verificar que ela é contínua por pedaços, de acordo com o Teorema III.2.2, basta analisá-la no intervalo $(-L, L)$. Como

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & se\ x \in]0, L[, \\ 0 & se\ x \in]-L, 0[. \end{cases}$$



ela será descontínua em $x = 0 \in (-L, L)$. *Mas os limites laterais neste ponto existem e são*

$$f'(0+) = 1, \quad f'(0-) = 0.$$

Além disso também existem

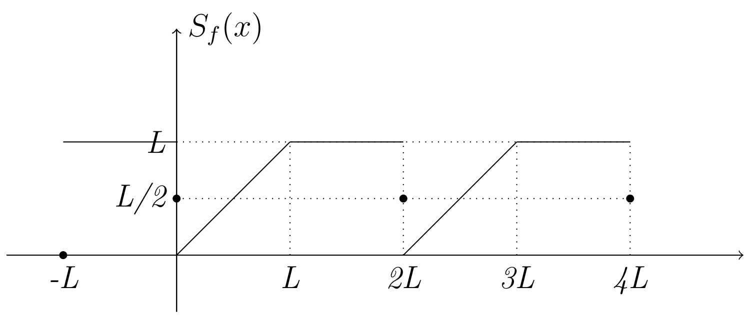
$$f'(-L_+) = 0, \quad e \quad f'(L_-) = 1.$$

Logo f *e* f' *são contínuas por partes e podemos então aplicar o Teorema de Fourier e concluir que*

$$S_f(x) = \frac{3L}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2L}{(2n-1)^2\pi^2} cos \frac{(2n-1)\pi x}{L} + \frac{L}{n\pi} sen \frac{n\pi x}{L} \right)$$
$$= \begin{cases} f(x) & se\ f\ for\ contínua\ em\ x \\ \dfrac{f(x+) + f(x-)}{2} & se\ f\ for\ descontínua\ em\ x. \end{cases}$$

Expressando a série em todo $\mathbb{R}$ *concluímos que:*

$$S_f(x) = \begin{cases} x - 2nL & se \quad x \in \,]2nL, ((2n+1)L)] \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \\ L & se \quad x \in \ [((2n+1)L), (2n+2)L[\quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \\ \dfrac{L}{2} & se \quad x = 2nL, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \end{cases}$$



Avaliando $S_f(x)$ para valores particulares de x:

a) $S_f(L)$. Como f é contínua em $x = L$ (ver o gráfico) teremos

$$\frac{3L}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2L}{(2n-1)^2\pi^2} \cos(2n-1)\pi \right) = S_f(L) = f(L) = L$$

b) $S_f(0)$. Como f é descontínua em $x = 0$ (ver o gráfico) teremos

$$\frac{3L}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2L}{(2n-1)^2\pi^2} \right) = S_f(0) = \frac{f(0_+) + f(0_-)}{2} = \frac{L}{2} \neq f(0) = L$$

Mas observe que explorando a periodicidade de f, e consequentemente de S_f, podemos calcular o valor de $S_f(x)$ para qualquer valor de x, sem conhecer a expressão que a define. Por exemplo:

Calculando $S_f((27.2)L)$. Como S_f é $2L$ periódica, sabemos que $S_f(x) = S_f(x + 2L) = S_f(x+n2L)$ qualquer que seja n número inteiro. Assim $S_f((27.2)L) = S_f((27.2)L - 28L) = S_f((-0.8)L)$. Como f é contínua em $x = -0.8L$ temos que $S_f((-0.8)L) = f((-0.8)L) = L$. Conclusão:

$$S_f((27.2)L) = S_f((-0.8)L) = L.$$

Note que através deste resultado podemos também, encontrar o valor para o qual algumas séries numéricas conhecidas convergem.

Por exemplo, $x = \dfrac{L}{2}$ é ponto de continuidade da $f(x)$ e assim temos $S_f(L/2) = f(L/2) = L/2$. Logo

$$S_f\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{3L}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2L}{(2n-1)^2\pi^2} cos \frac{(2n-1)\pi L}{2L} - \frac{L}{n\pi} sen \frac{n\pi L}{2L} \right)$$

$$= \frac{3L}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{(2n-1)\pi} sen \frac{(2n-1)\pi}{2} = \frac{3L}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n L}{(2n-1)\pi} = \frac{L}{2}$$

Isolando a série concluímos que

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots}$$

- *Vimos que a função $2L$ periódica*

$$f(x) = x \quad para \quad x \in]-L, L[$$

tem série de Fourier

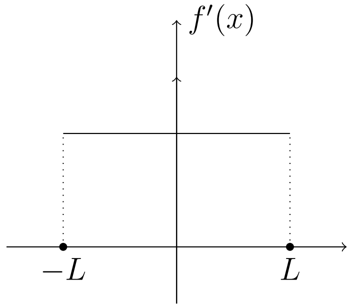
$$S_f(x) = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} sen \frac{n\pi x}{L} \tag{4}$$

Para verificar se f' é contínua por pedaços basta analisá-la no intervalo $(-L, L)$. Como

$$f'(x) = 1 \quad para \quad x \in \,]-L, L[$$

é contínua em $]-L, L[$. Além disso existem os limites laterais

$$f'(-L_+) = 1 = f'(L_-)$$



Logo f e f' são contínuas por pedaços. Novamente pelo Teorema de Fourier concluímos que

$$\frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} sen \frac{n\pi x}{L} = \begin{cases} f(x) & se \quad x \in \,](2n-1)L, (2n+1)L[, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \\ 0 & se \quad x \in (2n+1)L, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \end{cases}$$

Exercício: *Repetindo o procedimento do exemplo anterior verifique qual o valor da série no ponto $x = -(13,5)L$.*

- *Vimos que a função $2L$ periódica*

$$f(x) = |x| \quad para \quad x \in [-L, L]$$

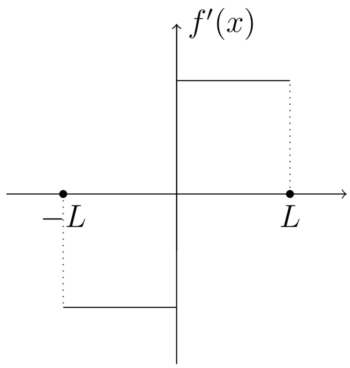
tem série de Fourier

$$S_f(x) = \frac{L}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4L)}{\pi^2(2n-1)^2} cos \frac{(2n-1)\pi x}{L} \tag{5}$$

Como f' é $2L$ periódica e

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x \in]0, L[, \\ -1 & se \quad x \in]-L, 0[\end{cases}$$

temos que f' também é contínua por pedaços(exercício).



Assim f é contínua em $\mathbb{R}$ e $f'(x)$ é contínua por partes. Logo pelo corolário do Teorema de Fourier

$$S_f(x) = f(x) \quad para \ todo \quad x \in \ \mathbb{R}.$$

Por exemplo,analisando-a em $x = 0$ temos

$$S_f(0) = \frac{L}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4L)}{\pi^2(2n-1)^2} = f(0) = |0| = 0.$$

Aqui também podemos determinar o valor de uma série numérica já vista. Basta isolar a série e obtemos:

$$\boxed{\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} \cdots}$$

Exercício III.3. *a) Determine a série de Fourier da função 2π periódica dada por*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & se \quad x \in [0, \pi[\\ -x^2 & se \quad x \in]-\pi, 0] \end{cases}$$

b) Determine os valores para os quais a série converge quando $x = 0$, $x = -\pi$, $x = -(29,5)\pi$.

Exercício III.4. *a) Escreva a série de Fourier da função 2π periódica dada por $f(x) = x^2$ para $x \in [-\pi, \pi]$.*

b) Determine o valor da série quando calculada nos pontos $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{-\pi}{2}$, $x = (141,2)\pi$.

c) Avaliando-se a série obtida em valor conveniente de x, mostre que

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \cdots$$

Exercício III.5. *Faça os exercícios 9) e 10) da Lista 4.*

III.4 Aula 21 - Erro Quadrático - Identidade de Parseval - Forma Complexa da Série de Fourier

Definição III.4.1. *Definimos um polinômio trigonométrico de ordem N como sendo uma função da forma:*

$$P_N(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} A_n \cos\frac{n\pi x}{L} + B_n sen\,\frac{n\pi x}{L}, \text{ onde } A_0, A_n, B_n \in \mathbb{R}.$$

Definição III.4.2. *Definimos o erro médio quadrático entre duas funções f, g integráveis no intervalo $[-L, L]$, como sendo:*

$$E(f,g) = \int_{-L}^{L} (f(x) - g(x))^2 dx$$

O erro médio quadrático aparece em inúmeras situações da Engenharia e da Ciência. Destacamos duas delas nos exemplos abaixo (ver [1] Capítulo 10, Seção 10.19):

1) A energia de deformação de uma barra de comprimento L é proporcional à

$$\int_0^L S^2(x)dx,$$

onde $S(x)$ é a distribuição de deformação longitudinal da barra. Uma aproximação $q(x)$ de $S(x)$ será boa quanto menor for

$$\int_0^L (S(x) - q(x))^2 dx.$$

2) A energia elétrica transferida ao resistor de um circuito elétrico, num período T é proporcional à

$$\int_0^T E^2(t)dt,$$

onde $E(t)$ é a voltagem periódica através do circuito elétrico. Uma aproximação $q(t)$ de $E(t)$ será boa quanto menor for

$$\int_0^T (E(t) - q(t))^2 dt.$$

Nosso objetivo nesta seção é encontrar o polinômio trigonométrico que melhor se aproxima de uma função f contínua por partes e $2L$ periódica, no sentido de que o erro médio quadrático entre eles seja mínimo.

Teorema III.4.3. *Seja f função contínua por partes e $2L$-periódica. Seja sua série de Fourier $S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n sen\,\frac{n\pi x}{L}$. Então o polinômio trigonométrico de ordem N que melhor se aproxima de f no intervalo $[-L, L]$, em média quadrática, é:*

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n sen\,\frac{n\pi x}{L}$$

Prova: *Mostraremos que para todo polinômio trigonométrico*

$$P_N(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} A_n \cos\frac{n\pi x}{L} + B_n sen\,\frac{n\pi x}{L}, \quad A_n, B_n \in \mathbb{R}$$

temos

$$E(S_N, f) < E(P_N, f)$$

para $S_N \neq P_N$. Seja

$$E(P_N, f) = \int_{-L}^{L} (f(x) - P_N(x))^2 dx = \int_{-L}^{L} f^2(x) - 2f(x)P_N(x) + P_N^2(x)dx.$$

Da definição dos coeficientes de Fourier de f obtemos:

$$\int_{-L}^{L} f(x)P_N(x)dx = \int_{-L}^{L} f(x)\frac{A_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{N} A_n \int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx + \sum_{n=1}^{N} B_n \int_{-L}^{L} f(x) sen\,\frac{n\pi x}{L}dx$$
$$= L\left[\frac{a_0 A_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n A_n + b_n B_n)\right]$$

E da ortogonalidade do conjunto $\{1, cos\frac{n\pi x}{L}, sen\,\frac{n\pi x}{L},\ n = 1, 2, \cdots\}$ no intervalo $[-L, L]$ obtemos:

$$\int_{-L}^{L} P_N^2(x)dx = \int_{-L}^{L} P_N(x)\frac{A_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{N} A_n \int_{-L}^{L} P_N(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx + \sum_{n=1}^{N} B_n \int_{-L}^{L} P_N(x) sen\,\frac{n\pi x}{L}dx$$
$$= L\left[\frac{A_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N}(A_n^2 + B_n^2)\right] \tag{6}$$

Logo

$$E(P_N, f) = \int_{-L}^{L} f^2(x)dx - 2L\left[\frac{a_0 A_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n A_n + b_n B_n)\right] + L\left[\frac{A_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N}(A_n^2 + B_n^2)\right] \tag{7}$$

Trocando-se P_N *por* $S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n sen\,\frac{n\pi x}{L}$ *concluímos que*

$$E(S_N, f) = \int_{-L}^{L} f^2(x)dx - 2L\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n^2 + b_n^2)\right] + L\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n^2 + b_n^2)\right] =$$

$$\int_{-L}^{L} f^2(x)dx - L\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n^2 + b_n^2)\right] \tag{8}$$

Logo

$$E(P_N, f) - E(S_N, f) = L\left\{\frac{1}{2}(a_0 - A_0)^2 + \sum_{n=1}^{N}(a_n - A_n)^2 + \sum_{n=1}^{N}(b_n - B_n)^2\right\}. \tag{9}$$

Como esta é uma soma de parcelas não negativas, temos que $E(P_N, f) - E(S_N, f) \geq 0$ *isto é,*

$$E(S_N, f) \leq E(P_N, f)$$

para todo $P_N(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} A_n \cos\frac{n\pi x}{L} + B_n sen\,\frac{n\pi x}{L}.$

Observe ainda que a igualdade entre os erros se dá somente quando as parcelas de (9) forem nulas, isto é quando $A_0 = a_0$, $A_n = a_n$ *e* $B_n = b_n$. *Logo o erro quadrático médio mínimo entre* f *e polinômio trigonométrico de ordem* N *qualquer, se dá quando* $P_N = S_N$, *como queríamos.*

No Apêndice I veremos uma interessante aplicação deste fato, relacionada às ondas sonoras.

III.4.1 Desigualdade de Bessel e Identidade de Parseval

Teorema III.4.4. *(Desigualdade de Bessel) Seja* $f(x)$ *uma função contínua por partes e* $2L$ *periódica com série de Fourier dada por*

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n cos\frac{n\pi x}{L} + b_n sen\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Então

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f^2(x)dx.$$

Observação III.7. *Note que, em particular, este resultado nos diz que os coeficientes de Fourier, de uma função contínua por pedaços, são tais que*

$$a_n \to 0 \text{ e } b_n \to 0.$$

Prova: *Como* $E(f, S_N) = \int_{-L}^{L} (f(x) - S_N(x))^2 dx \geq 0$ *temos de (8) que para todo* N

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f^2(x) dx.$$

Logo temos que o lado esquerdo desta desigualdade, forma uma sequência em N *crescente e limitada superiormente, e portanto convergente. Fazendo* $N \to \infty$ *concluímos o que queríamos, istó é:*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f^2(x) dx.$$

Não demonstraremos, mas na realidade, vale o seguinte resultado:

Teorema III.4.5. *(Identidade de Parseval) Seja* $f(x)$ *uma função contínua por partes e* $2L$ *periódica com série de Fourier dada por*

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right).$$

Então

$$\boxed{\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f^2(x) dx.}$$

Observação III.8. *Entre outras coisas, este resultado nos diz que para uma função contínua por partes, seus coeficientes de Fourier formam sequências que tendem a zero quando* $n \to \infty$.

Este resultado permite-nos determinar o valor de muitas séries numéricas convergentes.

Exemplo III.10. *Sabemos que para* $L > 0$, *a função* $2L$ *periódica* $f(x) = x$ *para* $x \in (-L, L)$, *tem série de Fourier:*

$$S_f(x) = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} sen \frac{n\pi x}{L}.$$

Logo $a_0 = a_n = 0$ *e* $b_n = \dfrac{2L(-1)^{n+1}}{\pi n}$. *Além disso* $\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} x^2 dx = \dfrac{2L^2}{3}$. *Aplicando-se a Identidade de Parseval concluímos que*

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Exercício III.6. *Seja a função* $2L$ *periódica dada por* $f(x) = x^3 - L^2x$, *para* $x \in [-L, L]$.

a) Mostre que sua série de Fourier é dada por

$$S_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 12L^3}{\pi^3 n^3} sen \frac{n\pi\ x}{L.}$$

b) Conclua que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$.

III.4.2 Apêndice I- Um modelo de audição humana

Ondas sonoras são variações no tempo da pressão do ar e entram no ouvido humano através de vibrações que estimulam células ciliares que oscilam e ativam células nervosas. Estas enviam sinais ao cérebro que interpretará tais sinais como sons. As células ciliares, dependendo de suas localizações, serão estimuladas por um tipo específico de frequência (alta, média, baixa). Um ouvido humano está apto a perceber ondas sonoras com frequências entre 20 *e* 20.000 *ciclos por segundo. Fora deste intervalo, não existem células ciliares capazes de serem estimuladas à ponto de produzirem sinais sonoros.*

Uma onda sonora simples terá a forma:

$q(t) = \dfrac{a_0}{2} + a_1 cos w_1 t + b_1 sen w_1 t = A_0 + A_1 sen(w_1 t + \delta_1)$, *onde* $A_0 = \dfrac{a_0}{2}$ *é a pressão atmosférica normal,* $A_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ *é a variação máxima da pressão em relação à* A_0, $tg\ \delta_1 = \frac{a_1}{b_1}$ *e* δ_1 *é chamado ângulo de fase da onda.* $q(t)$ *é dita uma onda senoidal de frequência* $\dfrac{w_1}{2\pi}$.

Uma onda sonora geral, periódica de período T, *será a soma infinita de ondas senoidais:*

$$p(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n sen(\frac{2n\pi}{T} t + \delta_n).$$

Pode-se afirmar que o ouvido humano funciona "linearmente"de modo que nossos ouvidos perceberão e enviarão sinais nervosos correspondentes a cada frequência que compõe este *som, desde que limitada entre* 20 *e* 20.000 *ciclos por segundo. Veja que* $p(t)$ *é superposição de ondas com frequências*

$$\frac{n}{T} \to \infty \text{ quando } n \to \infty.$$

Mas existe uma onda $q(t)$ *com frequência limitada que soará aos nossos ouvidos da mesma forma que* $p(t)$*. Para isso, a energia acústica da onda de erro entre* $p(t)$ *e* $q(t)$ *no período* T *deverá ser mínima e esta energia é proporcional ao erro médio quadrático entre* $p(t)$ *e* $q(t)$ *em qualquer intervalo de tamanho* T*, por exemplo*

$$\int_{-T/2}^{T/2} (p(t) - q(t))^2 dt.$$

Escrevendo a onda sonora como uma série de Fourier:

$$p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) + b_n sen\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)$$

segue do Teorema III.4.3 que a onda, cujo som soará aos nossos ouvidos como $p(t)$*, será o polinômio trigonométrico:*

$$q(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) + b_n sen\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)$$

onde N *é o maior natural tal que*

$$\frac{N}{T} \leq 20.000. \tag{10}$$

Exemplo III.11. *Consideremos a onda sonora* $2L-$*periódica tipo serra dada pela função:*

$$p(t) = t \text{ para } t \in (-L, L).$$

Calculando seus coeficientes de Fourier temos que:

$a_n = 0$ *para* $n \geq 0$*, já que* $p(t)$ *é ímpar, e*

$b_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L p(t) sen\left(\frac{2n\pi t}{L}\right) dt = \dfrac{2L(-1)^{n+1}}{n\pi}$ *para* $n \geq 1$.

Logo o Teorema de Fourier nos dá que, a menos dos pontos de descontinuidade de $p(t)$*, tem-se:*

$$p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L(-1)^{n+1}}{n\pi} sen\left(\frac{n\pi t}{L}\right).$$

Se admitirmos que $p(t)$ *tem frequência básica igual a* 5.000 *ciclos por segundo, concluímos que* $5.000 = \dfrac{1}{2L}$*. Logo de (10)*

$$\frac{N}{2L} = 5.000N \leq 20.000$$

e portanto $N \leq 4$.

Assim a onda sonora simples que soará aos nossos ouvidos como $p(t)$ *será:*

$$q(t) = \sum_{n=1}^{4} \frac{(-1)^{n+1}}{5000.n\pi} sen\left(\frac{n\pi t}{L}\right) =$$

$$= \frac{1}{5.10^3\pi} sen(10^3\pi t) - \frac{1}{10^4\pi} sen(2.10^3\pi t) + \frac{1}{15.10^3\pi} sen(3.10^3\pi t) - \frac{1}{2.10^4\pi} sen(4.10^3\pi t)$$

Você poderá ter mais detalhes sobre este assunto em [1], Capítulo 10, Seção 10.19.

III.4.3 Apêndice II: Significado geométrico

O conhecimento de Álgebra linear nos dá um significado geométrico para as séries de Fourier e os polinômios trigonométricos de ordem N, *a elas associadas. Além do que, fornece sem grandes esforços com cálculos, os resultados que obtemos acima.*

Para perceber isso, recordaremos alguns fatos importantes sobre espaços vetoriais com produto interno.

Seja V *um espaço vetorial com produto interno* $\langle ., . \rangle$ *e* V_N *um subspaço de* V *com base ortogonal* $\beta_N = \{v_0, v_1, \cdots v_N\}$.

Então qualquer vetor $u \in V_N$ *será combinação linear da base, isto é, existem constantes* a_i *tais que*

$$u = a_0 v_0 + a_1 v_1 + \cdots a_N v_N.$$

Pelo fato da base ser ortogonal, temos que

$$\langle u, v_i \rangle = a_i ||v_i||^2 \quad \forall i = 0, 1, \cdots, N.$$

Assim podemos escrever

$$u = \frac{\langle v_0, u \rangle}{||v_0||^2} v_0 + \frac{\langle v_1, u \rangle}{||v_1||^2} v_1 + \cdots \frac{\langle v_N, u \rangle}{||v_N||^2} v_N$$

bem como

$$||u||^2 = \langle u, u \rangle = \sum_{n=0}^{N} a_i^2 ||v_i||^2.$$

Além disso, temos que para vetor qualquer $v \in V$ a projeção ortogonal de v sobre V_N é dada pelo vetor:

$$Proj_{V_N}(v) = \frac{\langle v_0, v\rangle}{||v_0||^2}v_0 + \frac{\langle v_1, v\rangle}{||v_1||^2}v_1 + \cdots \frac{\langle v_N, v\rangle}{||v_N||^2}v_N$$

O vetor projeção tem a propriedade de ser o vetor no subespaço V_N que realiza a menor distância de v ao espaço V_N, isto é,

$$||v - Proj_{V_N}(v)||^2 \leq ||v-u||^2 \quad \forall u \in V_N \quad e \quad ||Proj_{V_N}(v)||^2 \leq ||v||^2$$

Traduzindo estes resultados geométricos para as séries de Fourier, se tomarmos V o espaço das funções contínuas por pedaços e $2L$- periódicas, com produto interno $\langle f, g\rangle = \int_{-L}^{L} f(x)g(x)dx$ e o subespaço $V_N \subset V$ gerado pela base ortogonal $\beta_N = \{1, \cos\frac{n\pi x}{L}, sen\ \frac{n\pi x}{L}, \forall n = 1, 2, \cdots N\}$ então para toda $f \in V$ temos que

$$Proj_{V_N}(f) = \frac{\langle 1, f\rangle}{||1||^2}1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{\left\langle \cos\frac{n\pi x}{L}, f\right\rangle}{||\cos\frac{n\pi x}{L}||^2}\cos\frac{n\pi x}{L} + \frac{\left\langle sen\frac{n\pi x}{L}, f\right\rangle}{||sen\frac{n\pi x}{L}||^2}sen\frac{n\pi x}{L}.$$

Mas lembramos que os coeficientes de Fourier de f são dados por

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{||1||^2}\langle 1, f\rangle, \quad a_n = \frac{1}{||cos\frac{n\pi x}{L}||^2}\left\langle cos\frac{n\pi x}{L}, f\right\rangle \quad e \quad b_n = \frac{1}{||sen\frac{n\pi x}{L}||^2}\left\langle sen\frac{n\pi x}{L}, f\right\rangle$$

concluímos que

1. $Proj_{V_N}(f) = S_N(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{N} a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n sen\ \frac{n\pi x}{L}.$

2. $||Proj_{V_N}(f)||^2 = \dfrac{a_0^2}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{N}(a_n^2 + b_n^2) \leq \int_{-L}^{L} f^2(x)dx = ||f||^2$

3. $E(f, S_N) = ||f - S_N||^2 \leq ||f - P_N||^2 = E(f, P_N)$ *para qualquer* $P_N \in V_N$.

III.4.4 Apêndice III: Formulaçao complexa para a série de Fourier

Vimos que se $f(x)$ *é uma função contínua por partes e* $2L$ *periódica então tem série de Fourier dada por*

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n cos \frac{n\pi x}{L} + b_n sen \frac{n\pi x}{L} \right)$$

onde $a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \cos \frac{n\pi x}{L} f(x)dx$ *e* $b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} sen \frac{n\pi x}{L} f(x)dx.$

Conforme consta no exercício 22) da Lista 3, segue a famosa fórmula devido a Euler

$$e^{ix} = \cos x + isen\ x \ \text{bem como}\ e^{-ix} = \cos x - isenx \quad \text{onde}\ i = \sqrt{-1}.$$

Assim

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \ \text{e}\ senx = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Usando estas relações obtemos

$$a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n sen \frac{n\pi x}{L} = a_n \left[\frac{e^{\frac{in\pi x}{L}} + e^{\frac{-in\pi x}{L}}}{2} \right] + b_n \left[\frac{e^{\frac{in\pi x}{L}} - e^{\frac{-in\pi x}{L}}}{2i} \right]$$

$$= \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} \right) e^{\frac{in\pi x}{L}} + \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i} \right) e^{\frac{-in\pi x}{L}} = c_n e^{\frac{in\pi x}{L}} + d_n e^{\frac{-in\pi x}{L}}$$

o que nos dá inicialmente

$$c_n = \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} \right) = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) \left(\cos \frac{n\pi x}{L} - isen \frac{n\pi x}{L} \right) dx =$$

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) e^{\frac{-in\pi x}{l}} \ \text{para}\ n = 1, 2, 3, \cdots$$

Bem como

$$d_n = \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i} \right) = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) \left(\cos \frac{n\pi x}{L} + isen \frac{n\pi x}{L} \right) dx =$$

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) e^{\frac{in\pi x}{l}} \ \text{para}\ n = 1, 2, 3, \cdots$$

o que podemos reunir numa única fórmula, já que $d_n = c_{-n}$ *e assim ficarmos com*

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) e^{\frac{-in\pi x}{l}} \ \text{para}\ n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$$

Adotando-se ainda que $c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$ *concluímos que*

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n cos\frac{n\pi x}{L} + b_n sen\frac{n\pi x}{L}\right) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n e^{\frac{in\pi x}{L}} + c_{-n} e^{\frac{-in\pi x}{L}}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{L}}$$

Acabamos assim de demonstrar que

Teorema III.4.6. *Se* $f(x)$ *é função* $2L$ *periódica e contínua por pedaços então sua série de fourier na forma complexa é dada por*

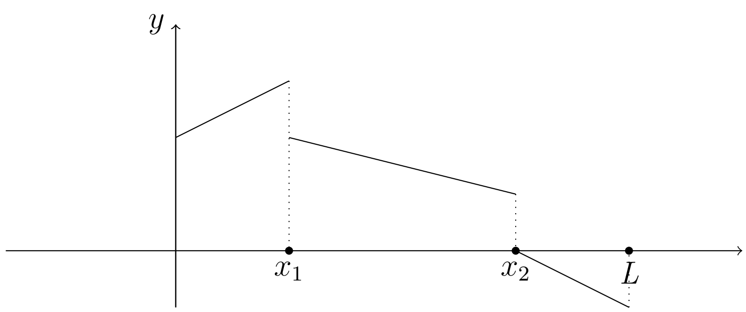
$$\boxed{S_f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{L}}, \quad \text{onde} \;\; c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{\frac{-in\pi x}{l}} \; \text{para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots}$$

III.5 Aula 22 - Extensões periódicas, pares e ímpares

Quando trabalharmos com aplicações de Séries de Fourier o parâmetro $L > 0$ terá significado de, comprimento de uma barra, no caso da equação do calor e comprimento de uma corda, no caso da equação da onda. Nos dois casos veremos que serão descritas condições sobre esta barra ou corda, condições estas que serão dadas através de funções definidas no intervalo $[0, L]$. Veremos ainda que estas funções deverão ser representadas por séries de Fourier que poderão apresentar apenas parcelas em senos, ou apenas parcelas em cossenos(Isso ficará claro adiante). Assim nesta aula veremos como estender convenientemente uma função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ para que ela possa ser representada através de uma série de Fourier que só tenha parcelas em senos, ou só em cossenos.

Assim seja $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ função com no máximo finitas descontinuidades $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subset [0, L]$ e tal que existam os limites laterais

$$f(0+), f(L-) \quad e \quad f(x_i\pm), \quad para \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$



Podemos estender tal função de modo que ela esteja definida para todo $\mathbb{R}$. E como queremos sua representação em série de Fourier, faremos extensões periódicas desta.

Primeiro façamos a extensão par e periódica. Para isso definimos inicialmente

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & se \quad x \in [0, L] \\ f(-x), & se \quad x \in [-L, 0]. \end{cases}$$

E agora a estendemos de modo periódico

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & se \quad x \in [0, L] \\ f(-x), & se \quad x \in [-L, 0] \\ \tilde{f}(x + 2L) = \tilde{f}(x) & se \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Deste modo, $\tilde{f}$ é uma **função contínua por partes** *em $\mathbb{R}$ e é a extensão par e $2L$ periódica de f. Logo $\tilde{f}$ tem série de Fourier cujos coeficientes serão*

onde

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \tilde{f}(x)dx \overset{par}{=} \frac{2}{L}\int_0^L \tilde{f}(x)dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \tilde{f}(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \overset{par}{=} \frac{2}{L}\int_0^L \tilde{f}(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \tilde{f}(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}dx \overset{ímpar}{=} 0.$$

De modo análogo podemos fazer a extensão ímpar e $2L$ periódica de f obtendo a **função contínua por partes** *em $\mathbb{R}$*

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x), & se \quad x \in]0, L] \\ -f(-x), & se \quad x \in [-L, 0[\\ \tilde{f}(x+2L) = \tilde{f}(x) & se \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Agindo de modo análogo ao caso da extensão par, vemos que os coeficientes de Fourier de $\hat{f}$ serão

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \tilde{f}(x)dx \overset{ímpar}{=} 0$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \tilde{f}(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \overset{ímpar}{=} 0$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \tilde{f}(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}dx \overset{par}{=} \frac{2}{L}\int_0^L \tilde{f}(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}dx.$$

Como era de se esperar, a série de Fourier da extensão par de f NÃO terá parcelas em senos e além disso, seus coeficientes não nulos só dependerão da definição de f no intervalo $[0, L]$. Bem como, a série da extensão ímpar de f NÃO terá parcelas em cossenos e seus coeficientes não nulos só dependerão da definição de f em $[0, L]$. Deste modo definimos:

Definição III.5.1. *$f : [0, L] \to \mathbb{R}$ função com finitas descontinuidades $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subset [0, L]$ e tal que existam os limites laterais*

$$f(0+), f(L-) \quad e \quad f(x_i\pm), \quad para \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

Então a série de Fourier em cossenos de f será dada por

$$S_{f,c}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\frac{n\pi x}{L}$$

onde $a_n = \frac{\overbrace{2}^{atenção}}{L} \int_0^L f(x)cos\frac{n\pi x}{L}$ *para* $n = 0, 1, 2, \cdots$

E a série de Fourier em senos de f será

$$S_{f,s}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen\frac{n\pi x}{L}$$

onde $b_n = \frac{\overbrace{2}^{atenção}}{L} \int_0^L f(x)sen\frac{n\pi x}{L}$ *para* $n = 1, 1, 2, \cdots$

Observação III.9. *Note que se f e sua derivada f' tiverem no máximo finitas descontinuidades do tipo salto finito no intervalo $[0, L]$, sabemos pelo Teorema de Fourier que, tanto a série em senos como em cossenos de f, irá convergir para a média dos limites laterais de f, para todo $x \in]0, L[$. Deste modo, como antes, a série de Fourier em senos ou cossenos de f convergirá para $f(x)$ a menos de um conjunto finito de pontos em $[0, L]$.*

Exemplo III.12. *Consideremos a função $f(x) = x$ para $x \in [0, L]$, $L > 0$.*

- *A série em senos de f é*

$$S_{f,s}(x) = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} sen\frac{n\pi x}{L} \tag{11}$$

  onde os coeficientes $(b_n)'s$ foram calculados em (4), isto é,

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L xsen\frac{n\pi x}{L} dx = \frac{-2L}{n\pi}(-1)^n.$$

- *A série em cossenos de f é*

$$S_{f,c}(x) = \frac{L}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4L}{\pi^2(2n-1)^2} cos\frac{(2n-1)\pi x}{L} \tag{12}$$

  onde os coeficientes $(a_n)'s$ foram calculados em (3), isto é,

  $a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L xdx = L$

  $a_n = \frac{2}{L} \int_0^L xcos\frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2L}{n^2\pi^2} [(-1)^n - 1].$

Observação III.10. *Neste exemplo, como $f(x) = x$, bem como sua derivada, é contínua para $x \in \,]0, L[$ o Teorema de Fourier nos dá que*

a) Como a extensão par e $2L$ periódica de $f(x) = x$ é contínua em $\mathbb{R}$ temos que

$$\frac{L}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4L}{\pi^2(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{L} = x, \quad se \quad x \in \, [0, L].$$

b) Como a extensão ímpar de $f(x) = x$ é contínua para $x \neq 2nL, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots$ então

$$\frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} sen \frac{n\pi x}{L} = \begin{cases} x & se \quad x \in \, [0, L[\\ 0 & se \quad x = L. \end{cases}$$

Observação III.11. *Pode-se mostrar que quanto mais suave ou regular for a extensão de f mais rapidamente se dará a convergência de sua série. Nos exemplos anteriores, a série em cossenos convergirá mais rápido para $f(x) = x, \quad x \in]0, L[$, do que a em senos.*

Exercício III.7. *a) Determine as séries de Fourier em senos e cossenos de*

$$f(x) = 1 \quad para \quad x \in \, [0, L], \; L > 0.$$

b) Determine para quais valores cada uma delas converge quando avaliadas em $x \in \, [0, L]$.

III.6 Lista 4 de Exercícios - Séries de Fourier.

1. *Verifique se as funções abaixo são pares ou ímpares ou não são nem pares nem ímpares:*

   a) $f(x) = x$ *b)* $f(x) = x - x^3$ *c)* $f(x) = x + x^2$

   d) $f(x) = sen(x^2 + 1)$ *e)* $f(x) = xcosx,$ *f)* $f(x) = e^{-x^2}$

   g) $f(x) = senx + cosx$ *h)* $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 \ se \ x < 0, \\ 1 + x^2 \ se \ x \geq 0 \end{cases}$

2. *Calcule as integrais abaixo.*

   a) $\displaystyle\int sen^2x \ dx.$

   b) $\displaystyle\int x^2 sen2x \ dx.$

   c) $\displaystyle\int e^{2x} sen3x \ dx$

   d) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (1 + x) sen2x \ dx.$

   e) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (1 + 3x^2 + 5x^8 - 10x^{14}) sen2x \ dx.$*(A mais trivial de todas!).*

3. *Verifique se as funções abaixo são contínuas por pedaços e se forem calcule* $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx$ *para*

   a) $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}.$

   b) $f(x) = 1 - x + -x|x| + x^2 + 4x^3 - x^7 + 3x^{11} + x^{19}$

   c) $f(x) = \begin{cases} x & se & x > 0 \\ 0 & se & x \leq 0 \end{cases}$

   d) $f(x) = \begin{cases} x & se & 0 < x < 1/2 \\ 1/2 & se & x \geq 1/2 \\ -x & se & x \leq 0 \end{cases}$

4. *Escreva a fórmula para os coeficientes de Fourier, bem como a série de Fourier, para o caso em que* $f(x)$ *é contínua por pedaços em* $\mathbb{R}$ *e*

   a) $f(x)$ *é função* $2-$*periódica e contínua por pedaçõs em* $[-1, 1]$.

   b) $f(x)$ *é* $10-$ *periódica, par e contínua por pedaços em [-5,5].*

c) $f(x)$ é $4\pi-$ periódica ímpar e contínua por pedaços em $[-2\pi, 2\pi]$.

5. *Supondo que as funções abaixo sejam $2\pi-$* **periódicas***, calcule a série de Fourier de cada uma delas :*

   $a) f(x) = \operatorname{sen}|x|,\ \ onde\ \ x \in [-\pi, \pi]$ $\quad b) f(x) = x,\ \ onde\ \ x \in [-\pi, \pi]$

   $c) f(x) = |x|,\ \ onde\ \ x \in [-\pi, \pi]$ $\quad d) f(x) = \operatorname{sen} x,\ \ onde\ \ x \in [-\pi, \pi]$

   $e) f(x) = x^2,\ \ onde\ \ x \in [-\pi, \pi]$ $\quad f) f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x + 0.5\ \operatorname{sen} 3x, x \in [-\pi, \pi]$

   $g) f(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \in [-\pi, 0] \\ 0, & se\ x \in [0, \pi]; \end{cases}$ $\quad h) f(x) = \begin{cases} senx, & se\ x \in [-\pi, 0] \\ 0, & se\ x \in [0, \pi]; \end{cases}$

   $i) f(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \in [-\pi, 0] \\ x, & se\ x \in [0, \pi]; \end{cases}$ $\quad j) f(x) = \begin{cases} -1, & se\ x \in [-\pi, 0] \\ 1, & se\ x \in [0, \pi]; \end{cases}$

   $k) f(x) = 3x - x^2,\ \ se\ x \in [0, 2\pi]$ $\quad$ *existe um modo "mais simples"para o cálculo*

   $l) f(x) = x \operatorname{sen} x$ $\quad m) f(x) = \cos^3 x$

6. *Para cada função do exercício anterior diga para onde convergem as séries de Fourier encontradas, quando $x = -\pi,\ 0,\ \pi/3,\ \pi/2,\ \pi, 17.2\pi, 18.3\pi, -152.1\pi, -733.7\pi$. Sugestão: Esboce o gráfico de cada uma delas , demarcando os pontos de descontinuidade, se eles existirem.*

7. *a) Dada a função $f(x) = 2 - x,\ \ 0 < x < 2$, encontre UMA FUNÇÃO cuja série de Fourier em senos convirja para $f(x)$ para todo $x \in]0, 2[$.*

   b) Dada a função $f(x) = 2 - x,\ \ 0 < x < 2$, encontre UMA FUNÇÃO cuja série de Fourier em cossenos convirja para $f(x)$ para todo $x \in]0, 2[$.

8. *Seja $f(x) = x$, $x \in [0, \pi]$. Encontre uma série de Fourier envolvendo senos e cossenos, que convirja para $f(x) = x$, para todo $x \in [0, \pi]$.(Pense numa extensão apropriada de f.)*

9. *Seja $f(x)$ função $2\pi-$periódica dada por $f(x) = \ \pi - x \quad se\ x \in (-\pi, \pi)$.*

   a) Mostre que sua série de Fourier é dada por $S_f(x) = \pi + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n sen\, nx}{n}$.

   b) Use o item a) para mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$.

10. *Seja* $f(x)$ *função* $2\pi-$*periódica dada por* $f(x) = \ |x| \quad se \ x \in (-\pi, \pi)$.

   a) Mostre que sua série de Fourier é dada por $S_f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x.$

   b) Use o item a) para mostrar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$

11. *Seja a função* $2L$ *periódica dada por* $f(x) = x^3 - L^2x$ *para* $x \in [-L, L]$.

   a) Mostre que sua série de Fourier é dada por

$$S_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 12L^3}{\pi^3 n^3} sen\frac{n\pi \ x}{L.}$$

   b) Use a Identidade de Parseval para mostrar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$

12. *Seja a série de Fourier da função* 2π *periódica* $f(x) = x^2$ *para* $x \in [-\pi, \pi]$. *Mostre que*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

13. *Seja a função* 2π *periódica tal que* $f(x) = \begin{cases} 1, & se \ x \in [0, \pi] \\ -1, & se \ x \in]-\pi, 0[. \end{cases}$ *Use sua série de Fourier para mostrar que*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

14. *Se* $f(x)$ *tem série de Fourier dada por* $\dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n cos \ nx + b_n sen \ nx$ *qual a série de Fourier de* $g(x) = f(x) sen \ x$*?*

15. *Se* $f(x)$ *tem série de Fourier dada por* $2 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}cos \ 2nx + \frac{1}{n^2+1}sen \ (2n+1)x$ *quais os valores de:*

   a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos \ 20x \ dx$ *b)* $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) sen \ 20x \ dx$ *c)* $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx.$

16. *Sejam as funções abaixo:*

   a) $f(x) = 25, \ para \ x \in [0, \pi]$ *b)* $f(x) = senx, \ para \ x \in [0, \pi]$

   c) $f(x) = x^2, \ para \ x \in [0, \pi]$ *d)* $f(x) = cosx, \ para \ x \in [0, \pi].$

c) $f(x) = \begin{cases} x, & se \quad 0 \leq x \leq \pi/2 \\ \pi - x, & se \quad \pi/2 < x < \pi \end{cases}$

d) $f(x) = |2x - \pi|$, *para* $x \in]0, \pi[$.

I) Escreva suas representações em série de Fourier em senos.

II) Escreva suas representações em série de Fourier em cossenos.

17. *Seja* $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ *contínua por pedaços. Estendemos* f *no intervalo* $(L, 2L]$ *de modo que ela seja simétrica em torno de* $x = L$ *(faça um esboço), o que matematicamente significa que* $f(2L - x) = f(x)$ *para todo* $x \in [0, L)$. *Tome agora a extensão ímpar e* $4L$ *periódica desta função. Mostre que a função resultante tem série de Fourier em senos dada por:*

$$S_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen \frac{(2n-1)\pi x}{2L}$$

onde

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) sen \frac{(2n-1)\pi x}{2L} dx.$$

OBS: Se $f(x)$ *for contínua em* $(0, L)$ *então* $S_f(x) = f(x)$ *nestes pontos.*

18. *Como estenderia* f *do exercício anterior para que ela tivesse série de Fourier com parcelas* $cos \frac{(2n-1)\pi x}{2L}$*?*

OBS: Guarde os resultados dos 3 últimos exercícios pois serão usados na próxima lista de exercícios.

BOM TRABALHO!

III.7 Aula 23 - Aplicações de Séries de Fourier

Finalmente veremos as aplicações que deram origem à "criação" e estudo das séries de Fourier.

A primeira delas é o Problema da difusão de calor numa barra. E a segunda é o Problema das vibrações transversais numa corda. Vamos primeiramente tratar do problema de calor.

III.7.1 Problema de difusão de calor na barra

Suponha uma barra de comprimento $L > 0$ *fina e homogênea cujas seções transversais tenham mesmo formato e área constante e igual a* $A > 0$*. Suponha ainda que ela se encontre lateralmente termicamente isolada, de tal forma que não haja ganho nem perda de calor pela lateral da barra. Deste modo o fluxo de calor no seu interior se dá na direção longitudinal da barra e o ganho ou perda de calor só pode ocorrer através de suas extremidades.*

Desta forma, podemos representar a barra como o intervalo $[0, L]$ *e cada ponto* $x \in [0, L]$ *representa a seção transversal de área* A *na posição* x*. Suponhamos ainda que não haja nenhuma fonte, nem sorvedouro, externo de calor. Podemos demonstrar, através da Lei de Resfriamento de Fourier que se*

$$u(x,t) = \text{ temperatura na seção } x \in \,]0, L[\, \text{ e no tempo } t > 0$$

então a equação do calor unidimensional é dada por

$$u_t(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t) \quad para \quad x \in \,]0, L[, t > 0. \tag{13}$$

onde

$$\alpha^2 = \frac{k}{\rho s}$$

é chamada a constante de difusivibilidade térmica da barra, que depende apenas do material que a compõe, uma vez que, k é a constante de difusividade térmica do material, ρ a densidade do material e s o calor específico do material. Se a distribuição inicial de temperatura na barra for dada por

$$u(x,0) = f(x) \quad para \quad x \in \,]0, L[$$

o que se quer saber é qual a temperatura num ponto (ou numa seção) x e instante t futuro?

Mas para responder esta questão precisamos fixar outras condições sobre a barra, condições estas que denominaremos Condições de Contorno ou de Fronteira sobre a barra. As mais conhecidas são:

a) Condição de Dirichlet: Suponha que as extremidades da barra tenham suas temperaturas fixadas com o passar do tempo, isto é,

$$u(0,t) = T_0 \quad e \quad u(L,t) = T_1 \quad para\ todo \quad t > 0,$$

onde $T_0, T_1 \in \mathbb{R}$. Em particular, quando $T_0 = 0 = T_1$ tal condição é dita Condição de Dirichlet **homogênea.**

b) Condição de Neumann: Suponha que o fluxo de calor nas extremidades sejam fixos, isto é,

$$u_x(0,t) = v_0 \quad e \quad u_x(L,t) = v_1 \quad para\ todo \quad t > 0,$$

onde $v_0, v_1 \in \mathbb{R}$. Em particular, quando $v_0 = 0 = v_1$ tal condição é dita Condição de Neumann **homogênea.** *Neste caso você pode imaginar a barra totalmente envolvida por isopor de modo que não haja troca de calor com o meio, nem através das extremidades.*

c) Condição de Robin: Certamente a mais comum das condições de contorno. Nela há transferência de calor através das suas extremidades e ela é proporcional à diferença entre a temperatura ambiente $T_a \in \mathbb{R}$ e a temperatura nas extremidades, isto é,

$$u_x(0,t) = k(u(0,t) - T_a) \quad e \quad -u_x(l,t) = k(u(L,t) - T_a), \quad para \quad t > 0.$$

onde $k > 0$ depende do material que compõe a barra e do meio onde a barra está imersa(água salgada, óleo, ar, etc.). O sinal negativo se deve ao fato de que no ponto $x = 0$ a temperatura ambiente ocorrerá à esquerda do $x = 0$ e já no ponto $x = L$ a temperatura ambiente se dará à direita de $x = L$. Assim, por exemplo se $T_a > u(0,t)$ haverá fluxo de calor de fora para dentro(do ponto mais quente para o ponto mais frio) e assim $u_x(0,t) < 0$ já no ponto L se $T_a > u(L,t)$ o fluxo se dará da direita para a esquerda e portanto $u_x(L,t) > 0$

d) Combinação mista, por exemplo:

$$u(0,t) = 0 = u_x(L,t) \quad para \quad t > 0.$$

Sem estas condições não podemos prever a temperatura da barra num instante futuro e cada condição de contorno específica, implicará num comportamento diferente na difusão, mesmo que em todos os casos a distribuição inicial de temperatura seja a mesma, como veremos adiante.

Vamos inicialmente trabalhar com a condição de Dirichlet homogênea. Assim consideremos

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t) & para \quad x \in\ ]0,L[, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0 = u(L,t) & para\ todo \quad t > 0, \\ u(x,0) = f(x) & para\ todo \quad x \in\ [0,L]. \end{cases} \tag{14}$$

que é um **Problema de valor inicial e de contorno de Dirichlet** uma vez que foram fixadas as condições inicial e de contorno sobre a barra.

Para resolver este problema, inicialmente vamos resolver o Problema de Contorno associado:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{I}} = \begin{cases} u_t(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t) & para \quad x \in\ ]0,L[, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0 = u(L,t) & para\ todo \quad t > 0. \end{cases} \tag{15}$$

Este problema é linear homogêneo, isto é,

a) $u(x,t) = 0$ para todo (x,t), é solução de $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}$.

b) Se $u_1(x,t)$ e $u_2(x,t)$ são soluções de $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}$ então para todo $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ temos

$$u(x,t) = \alpha_1 u_1(x,t) + \alpha_2 u_2(x,t)$$

também é solução de $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}$.

De fato, provar a) é trivial. Quanto a b) veja que u_1, u_2 são soluções e portanto ambas satisfazem $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}$. Logo

$$u_t = (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)_t = \alpha_1 (u_1)_t + \alpha_2 (u_2)_t \overset{soluções}{=} \alpha^2 \alpha_1 (u_1)_{xx} + \alpha^2 \alpha_2 (u_2)_{xx}$$
$$= \alpha^2 (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)_{xx} = \alpha^2 u_{xx}.$$

Além disso

$$u(0,t) = \alpha_1 u_1(0,t) + \alpha_2 u_2(0,t) = 0 = \alpha_1 u_1(L,t) + \alpha_2 u_2(L,t) = u(L,t) \quad \textit{para todo} \quad t > 0.$$

Logo o conjunto $\mathcal{S}$ de todas as soluções deste problema é um **Espaço Vetorial** *e assim buscaremos uma* **base** *de soluções para tal problema, de modo que qualquer outra solução possa ser escrita através de uma "combinação linear" de elementos desta base. Mas diferente do que ocorre em Equações diferenciais ordinárias, apesar deste problema envolver uma equação diferencial de segunda ordem, encontraremos infinitos elementos, ou melhor, infinitas funções para esta base, e de modo geral, uma solução qualquer será uma "combinação linear infinita" dos elementos da base (uma série de funções).*

Antes de buscá-la veja que o mesmo ocorre quando trabalhamos com condição de contorno de Neumann homogênea.

Neste caso o problema de contorno associado é

$$\mathcal{P}_{\mathcal{II}} = \begin{cases} u_t(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t) & \textit{para} \quad x \in \,]0,L[, \quad t > 0, \\ u_x(0,t) = 0 = u_x(L,t) & \textit{para todo} \quad t > 0. \end{cases} \tag{16}$$

Exercício III.8. *Mostre que este problema é linear e homogêneo.*

Exercício III.9. *Escreva os problemas de contorno associados as condições dadas em c) e d). Mostre que cada um destes problemas é linear homogêneo.*

III.7.2 Método da Separação de Variáveis ou de Fourier

Inicialmente vamos buscar soluções especiais de $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}$ e para isso utilizaremos o Método da Separação de Variáveis, que consiste em determinar soluções não triviais (não identicamente nulas), de problemas lineares da forma

$$u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0.$$

Como $u_t = X(x)T'(t)$ *e* $u_{xx} = X''(x)T(t)$ *se* $u(x,t) = X(x)T(t)$ *for solução não nula de* $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}$ *temos*

$$X(x)T'(t) = \alpha^2 X''(x)T(t) \quad para \quad x \in \,]0, L[\quad e \quad t > 0.$$

Como $X(x) \neq 0 \neq T(t)$ *temos*

$$\frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad para \quad x \in \,]0, L[\quad e \quad t > 0.$$

Como t *e* x *são variáveis independentes uma função de* x *só será igual a uma função de* t *se elas forem constantes, assim deve existir constante* $\sigma \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \sigma \quad para \quad x \in \,]0, L[\quad e \quad t > 0.$$

que separaremos em duas equações

$$X'' = \sigma X \quad e \quad T' = \sigma \alpha^2 T.$$

Mas uma vez que a condição de contorno está fixada, concluímos que $u(0,t) = X(0)T(t) = 0 = X(L)T(t) = u(L,t)$ *para todo* $t > 0$*. Logo*

$$X(0) = 0 = X(L).$$

Assim resolveremos dois problemas

$$\begin{cases} X'' = \sigma X \quad para \quad x \in [0, L] \\ X(0) = 0 = X(L). \end{cases} \quad e \quad T'(t) = \alpha^2 \sigma T(t).$$

Agora passaremos a analisar todas as possibilidades para σ *de modo que encontremos* $X(x)$ *e* $T(t)$ *não nulas e consequentemente* $u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$*. Vamos dividir em três casos:* $\sigma = 0$, $\sigma > 0$ *e* $\sigma < 0$.

Observação III.12. *Em alguns problemas, que não trataremos aqui, podemos ter* $\sigma \in \mathbb{C}$.

I) Suponhamos $\sigma = 0$*. Assim buscamos*

$$\begin{cases} X'' = 0 \quad para \quad x \in [0, L] \\ X(0) = 0 = X(L). \end{cases}$$

após duas integrações sucessivas concluímos que

$$X(x) = ax + b \ \ \textit{para quaisquer} \ \ a, b \in \mathbb{R}$$

que junto com a condição de contorno nos diz que $X(x)$ *é uma reta que passa por* 0 *em dois valores distintos de* x *e portanto*

$$X(x) = 0 \ \ \forall x,$$

o que não nos interessa.

II) Suponhamos $\sigma > 0$. *Vamos representar tal número positivo por* $\sigma = \beta^2$ *onde* $\beta > 0$. *Assim buscamos* $X(x)$ *não nula tal que*

$$\begin{cases} X'' = \beta^2 X \quad \textit{para} \quad x \in [0, L] \\ X(0) = 0 = X(L). \end{cases}$$

Com as técnicas de equações diferenciais ordinárias temos que $X(x) = ae^{\beta x} + be^{-\beta x}$ *que junto com as condições de contorno nos dão:*

$$X(0) = a + b = 0 \quad e \quad X(L) = ae^{\beta L} + be^{-\beta L} = 0.$$

Resolvendo este sistema concluímos que $a = b = 0$ *e portanto* $X(x) = 0$, *o que não nos interessa.*

III) Suponhamos $\sigma < 0$. *Vamos representar tal número negativo por* $\sigma = -\beta^2$ *onde* $\beta > 0$. *Assim buscamos* $X(x)$ *não nula tal que*

$$\begin{cases} X'' = -\beta^2 X \quad \textit{para} \quad x \in [0, L] \\ X(0) = 0 = X(L). \end{cases} \tag{17}$$

Com as técnicas de equações diferenciais ordinárias temos que $X(x) = acos\beta x + bsen\beta x$ *que junto com as condições de contorno nos dão:*

$$X(0) = a = 0 \quad e \quad X(L) = bsen\beta L = 0.$$

Se $b = 0$ *obtemos* $X(x) = 0$, *o que não nos interessa. Mas se* $b \neq 0$ *temos que* $sen\beta L = 0$ *o que implica que*

$$\beta L = n\pi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Com isso encontramos infinitas funções não nulas, $X_n(x)$, satisfazendo (17):

$$X_n(x) = sen\frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

E para cada

$$\sigma_n = -\beta^2 = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

temos também correspondente equação $\quad T_n'(t) = -\alpha^2\frac{n^2\pi^2}{L^2}T_n(t)$, *resultando nas soluções*

$$T_n(t) = ae^{\frac{-\alpha^2 n^2\pi^2}{L^2}t}, \quad n = 1, 2, \cdots, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Como estamos interessados numa base de soluções, portanto seus elementos podem estar multiplicados por qualquer constante não nula, tomaremos $a = 1$. Em resumo para cada $\sigma_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ as funções

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = e^{\frac{-\alpha^2 n^2\pi^2 t}{L^2}} sen\frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

formam a base procurada para o conjunto de soluções $\mathcal{S}$ de $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}$. Deste modo, cada solução de

$$\mathcal{P}_{\mathcal{I}} = \begin{cases} u_t(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t) & \textit{para} \quad x \in \,]0, L[, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0 = u(L,t) & \textit{para todo} \quad t > 0. \end{cases} \tag{18}$$

será "combinação linear" de elementos da base, isto é,

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{\frac{-\alpha^2 n^2\pi^2 t}{L^2}} sen\frac{n\pi x}{L}, \quad b_n \in \mathbb{R}.}$$

III.8 Aula 24 - Solução do Problema de Valor Inicial e de Contorno

Vimos na aula anterior que o problema do calor com condição de Dirichlet homogênea

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t) & \textit{para} \quad x \in \,]0, L[, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0 = u(L,t) & \textit{para todo} \quad t > 0. \end{cases}$$

tem solução geral dada por

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{\frac{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t}{L^2}} sen \frac{n\pi x}{L}, \quad b_n \in \mathbb{R}. \tag{19}$$

Para determinarmos (b_n) *precisamos fixar a temperatura inicial da barra, isto é, precisamos conhecer* $u(x,0)$*:*

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t) & \textit{para} \quad x \in \,]0, L[, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0 = u(L,t) & \textit{para todo} \quad t > 0, \\ u(x,0) = f(x) & \textit{para todo} \quad x \in \, [0, L]. \end{cases} \tag{20}$$

Antes porem, vejamos formalmente que realmente (19) é solução do problema. Para isso vamos admitir que derivar $u(x,t)$ *é derivar a série termo a termo. Esta é uma questão técnica que, para ser justificada, exigiria aprofundamento na teoria, mas vamos omití-la. Assim derivando (19) temos*

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} b_n e^{\frac{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t}{L^2}} sen \frac{n\pi x}{L} \quad e \quad u_{xx}(x,t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{L^2} b_n e^{\frac{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t}{L^2}} sen \frac{n\pi x}{L}$$

o que nos dá $u_t = \alpha^2 u_{xx}$*. Claramente* $u(0,t) = u(L,t) = 0$*.*

Assim, para encontrarmos a solução de (20) veja que $u(x,0) = f(x)$ *para* $x \in \, [0, L]$*, logo temos simultaneamente:*

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{\frac{-\alpha^2 n^2 \pi^2 0}{L^2}} sen \frac{n\pi x}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen \frac{n\pi x}{L} = f(x).$$

Logo a condição inicial, $u(x,0) = f(x)$*, deve ser dada através de uma "combinação linear" finita ou infinita de* $sen \frac{n\pi x}{L}$*, e portanto*

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) sen \frac{n\pi x}{L}, \text{para } n = 1, 2, \cdots$$

Logo para resolver o problema do calor com condição de Dirichlet homogênea, basta encontrarmos a representação de $f(x)$ em série de Fourier em senos.

Note que já vimos que se a extensão periódica ímpar de f for contínua por partes e f' também for contínua por partes, então f tem série de Fourier em senos, $S_{fs}(x)$, e o Teorema de Fourier nos diz que $S_{fs}(x) = f(x)$ em todos os pontos onde f é contínua. Logo, a menos de um conjunto finito de pontos no intervalo $[0, L]$, teremos $u(x, 0) = S_{fs}(x) = f(x)$. Vejamos o exemplo a seguir:

Exemplo III.13. *Suponha uma barra homogênea de comprimento π, lateralmente isolada, com coeficiente de difusivibilidade térmica 4. Suponha que suas extremidades sejam mantidas à temperatura de 0^oC. Suponha ainda, que inicialmente os pontos da barra tenham temperatura prescrita por $f(x) = x$. Determine qual o problema que descreve esta situação e qual a solução deste problema.*

Como $L = \pi$ e $\alpha = 2$ temos que se $u(x, t)$ é a temperatura do ponto x da barra no instante t então

$$\begin{cases} u_t(x,t) = 2^2 u_{xx}(x,t) & \textit{para} \quad x \in \,]0,\pi[, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 0 = u(\pi,t) & \textit{para todo} \quad t > 0, \\ u(x,0) = x & \textit{para todo} \quad x \in \, [0,\pi]. \end{cases}$$

Mas já vimos que a solução do problema é da forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{\frac{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t}{L^2}} sen\frac{n\pi x}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-2^2 n^2 t} sen(nx), \quad b_n \in \mathbb{R}.$$

onde

$$u(x,0) = x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen(nx).$$

Logo precisamos dos coeficientes de Fourier em senos de $f(x) = x, \quad x \in [0, \pi]$. Portanto

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \operatorname{sen} nx dx \overset{(11)}{=} \frac{2}{n} (-1)^{n+1}.$$

Assim $\quad u(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} e^{-4n^2 t} sen(nx)$ *é a solução procurada.*

Como dissemos antes, do fato da extensão ímpar e 2π periódica de $f(x) = x$ ser contínua em $[0, \pi[$ e descontínua em π, não teremos $u(x, 0) = x$ para $x = L$. Mas este fato não traz problemas para a análise física da solução problema.

III.8.1 Soluções de equilíbrio ou estacionárias e o problema de Dirichlet não homogêneo

Para trabalhar com o problema do calor com condição geral de Dirichlet, buscaremos inicialmente soluções estacionárias do problema

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t) & \text{para} \quad x \in \,]0,L[, \quad t > 0, \\ u(0,t) = T_1, \quad u(L,t) = T_2 & \text{para todo} \quad t > 0. \end{cases},$$

observando que tal problema só será homogêneo se $T_1 = T_2 = 0$.

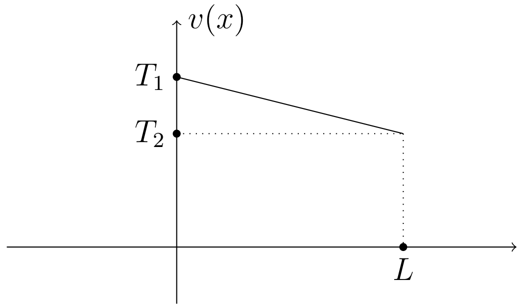
As soluções estacionárias ou de equilíbrio de um problema, são aquelas que não variam com o tempo(por isso o termo estacionária), de modo que $u(x,t) = v(x)$, *isto é, depende só de* x *e consequentemente* $u_t(x,t) = 0$ *para todo* (x,t). *No nosso caso, por também serem soluções do problema acima, satisfazem*

$$\begin{cases} v''(x) = 0 & \text{para} \quad x \in \,]0,L[, \quad t > 0, \\ v(0) = T_1, \quad v(L) = T_2 & \text{para todo} \quad t > 0. \end{cases}$$

Mas integrando-se $v''(x) = 0$ *duas vezes temos que* $v(x) = ax + b$ *para* $x \in [0,L]$, *para quaisquer pares de constantes* a, b. *Da condição de contorno,* $v(0) = T_1$, $v(L) = T_2$, *concluímos que*

$$v(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1, \tag{21}$$

isto é, a solução estacionária do problema do calor, com condição de Dirichlet, é uma reta passando pelos pontos $(0, T_1)$ *e* (L, T_2). *Observe que, no caso especial em que* $T_1 = T_2 = 0$, *a solução estacionária do problema do calor com condição de Dirichlet homogêneo é* $v = 0$. *Veremos adiante, que estes fatos implicam num fato físico bastante corriqueiro em relação à temperatura futura nos pontos da barra.*



Vamos então resolver o problema

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t) & \textit{para} \quad x \in \,]0,L[, \quad t>0, \\ u(0,t) = T_1, \quad u(L,t) = T_2 & \textit{para todo} \quad t>0, \\ u(x,0) = f(x) & \textit{para todo} \quad x \in \ [0,L]. \end{cases} \tag{22}$$

Para isso, vamos fazer uma mudança de variável que transforme tal problema em outro que seja homogêneo.

Assim seja $u(x,t)$ *solução de (22) e seja* $v(x) = \dfrac{T_2 - T_1}{L}x + T_1$ *a solução estacionária deste mesmo problema. Escrevendo*

$$u(x,t) = v(x) + w(x,t)$$

vejamos que condições $w(x,t)$ *satisfaz.*

Como $w(x,t) = u(x,t) - v(x)$ *derivando-a temos:*

$$w_t = u_t \ \ e \ \ w_{xx} = u_{xx} - v'' = u_{xx}.$$

Logo como u *é solução de (22) temos que*

$$w_t = \alpha^2 w_{xx}, \quad para \ \ x \in \,]0,L[, \quad t>0.$$

Além disso

$$w(0,t) = u(0,t) - v(0) = T_1 - T_1 = 0 \ \ \textit{bem como} \quad w(L,t) = u(L,t) - v(L) = T_2 - T_2 = 0.$$

Por fim $w(x,0) = u(x,0) - v(x) = f(x) - v(x)$.

Assim $w(x,t) = u(x,t) - v(x)$ é solução do problema de valor inicial e de contorno de Dirichlet homogêneo:

$$\begin{cases} w_t(x,t) = \alpha^2 w_{xx}(x,t) & \textit{para} \quad x \in\,]0,L[, \quad t > 0, \\ w(0,t) = 0 = w(L,t) & \textit{para todo} \quad t > 0, \\ w(x,0) = f(x) - v(x) & \textit{para todo} \quad x \in\ [0,L]. \end{cases} \tag{23}$$

problema este que sabemos resolver. Conclusão:

Teorema III.8.1. *Seja $u(x,t)$ a solução de*

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t) & \textit{para} \quad x \in\,]0,L[, \quad t > 0, \\ u(0,t) = T_1, \quad u(L,t) = T_2 & \textit{para todo} \quad t > 0, \\ u(x,0) = f(x) & \textit{para todo} \quad x \in\ [0,L]. \end{cases}$$

e $v(x) = \dfrac{T_2 - T_1}{L}x + T_1$ a correspondente solução estacionária do problema. Então

$$u(x,t) = w(x,t) + v(x)$$

onde $w(x,t)$ é a solução de

$$\begin{cases} w_t(x,t) = \alpha^2 w_{xx}(x,t) & \textit{para} \quad x \in\,]0,L[, \quad t > 0, \\ w(0,t) = 0 = w(L,t) & \textit{para todo} \quad t > 0, \\ w(x,0) = \underbrace{f(x) - v(x)}_{!!!} & \textit{para todo} \quad x \in\ [0,L]. \end{cases}$$

Exemplo III.14. *Determine a solução do problema*

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} \quad x \in]0,\pi[, \quad t > 0 \\ u(0,t) = -2, \quad u(\pi,t) = 2, \quad t > 0 \\ u(x,0) = -2, \quad x \in\ [0,\pi]. \end{cases}$$

Vimos que para isso precisamos da correspondente solução estacionária

$$v(x) = \left(\frac{[2 - (-2)]}{\pi} x - 2 \right) = \frac{4x}{\pi} - 2$$

e de $w(x,t)$, solução de

$$\begin{cases} v_t = 4v_{xx} \quad x \in]0,\pi[, \quad t > 0 \\ w(0,t) = w(\pi,t) = 0, \quad t > 0 \\ w(x,0) = -2 - v(x) = -\dfrac{4x}{\pi}, \quad x \in\ [0,\pi]. \end{cases}$$

Mas sabemos que como este problema é homogêneo sua solução será

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-4n^2 t} sen(nx)$$

onde $b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \dfrac{-4x}{\pi} sen(nx)dx = -\dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} x sen(nx)dx\right) = \dfrac{8}{\pi n}(-1)^n.$

Logo

$$u(x,t) = \left(\frac{4x}{\pi} - 2\right) + \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-4n^2 t} sen(nx).$$

III.9 Aula 25 - Barra termicamente isolada

Passaremos agora ao estudo da difusão do calor numa barra termicamente isolada, isto é, vamos resolver o problema de calor com condição de Neumann homogênea:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t) & \textit{para} \quad x \in\,]0,L[, \quad t>0, \\ u_x(0,t) = 0 = u_x(L,t) & \textit{para todo} \quad t>0, \\ u(x,0) = f(x) & \textit{para todo} \quad x \in\ [0,L]. \end{cases} \tag{24}$$

Como antes, inicialmente buscaremos uma base de soluções para o problema de contorno

$$\mathcal{P}_{\mathcal{II}} = \begin{cases} u_t(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t) & \textit{para} \quad x \in\,]0,L[, \quad t>0, \\ u_x(0,t) = 0 = u_x(L,t) & \textit{para todo} \quad t>0. \end{cases} \tag{25}$$

Lembrando que este é um problema linear e homogêneo, de forma que, o conjunto $\mathcal{S}$ de todas as suas soluções é um espaço vetorial e portanto tem uma base. Como no caso de Dirichlet homogêneo, procuraremos tal base de soluções através do Método da separação de variáveis.

Assim suponhamos $u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$ solução do problema $\mathcal{P}_{\mathcal{II}}$. Então, como no caso $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}$ temos:

$$X(x)T'(t) = \alpha^2 X''(x)T(t) \quad \textit{para} \quad x \in\,]0,L[\quad e \quad t>0.$$

Como $X(x) \neq 0 \neq T(t)$ temos

$$\frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad \textit{para} \quad x \in\,]0,L[\quad e \quad t>0.$$

Como t e x são variáveis independentes uma função de x só será igual a uma função de t se elas forem constantes, assim deve existir constante $\sigma \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \sigma \quad \textit{para} \quad x \in\,]0,L[\quad e \quad t>0.$$

que separaremos em duas equações

$$X'' = \sigma X \quad e \quad T' = \sigma\alpha^2 T.$$

Mas uma vez que a condição de contorno está fixada, concluímos que $u_x(0,t) = X'(0)T(t) = 0 = X'(L)T(t) = u_x(L,t)$ para todo $t>0$. Logo

$$X'(0) = 0 = X'(L).$$

Assim resolveremos dois problemas

$$\begin{cases} X'' = \sigma X \quad \textit{para} \quad x \in [0, L] \\ X'(0) = 0 = X'(L). \end{cases} \quad e \quad T'(t) = \alpha^2 \sigma T(t).$$

Agora passaremos a analisar todas as possibilidades para σ de modo que encontremos $X(x)$ e $T(t)$ não nulas. Vamos dividir em três casos: $\sigma = 0$, $\sigma > 0$ e $\sigma < 0$.

I) Suponhamos $\sigma = 0$. Assim buscamos

$$\begin{cases} X'' = 0 \quad \textit{para} \quad x \in [0, L] \\ X'(0) = 0 = X'(L). \end{cases}$$

após duas integrações sucessivas concluímos que

$$X(x) = ax + b \ \ \textit{para quaisquer} \ \ a, b \in \mathbb{R}$$

que junto com a condição de contorno nos diz que $X(x)$ é uma reta com coeficiente angular nulo portanto

$$X(x) = b \ \ \forall x$$

onde b é constante arbitrária. Note que aqui já temos uma diferença com o caso de Dirihlet homogêneo, pois lá $\sigma = 0$ só nos dava a solução nula. Como vamos compor uma base de soluções e não nos interessa o tamanho dos "vetores" desta base, tomemos por conveniência futura,

$$X_0(x) = \frac{1}{2} \quad \forall \ x.$$

II) Suponhamos $\sigma > 0$. Vamos representar tal número positivo por $\sigma = \beta^2$ onde $\beta > 0$. Assim buscamos $X(x)$ não nula tal que

$$\begin{cases} X'' = \beta^2 X \quad \textit{para} \quad x \in [0, L] \\ X'(0) = 0 = X'(L). \end{cases}$$

Com as técnicas de equações diferenciais ordinárias lineares temos que $X(x) = ae^{\beta x} + be^{-\beta x}$ que junto com as condições de contorno nos dão:

$$X'(0) = \beta(a - b) = 0 \quad e \quad X'(L) = \beta(ae^{\beta L} - be^{-\beta L}) = 0.$$

Como $\beta > 0$ temos $a = b$ e como também $L \neq 0$ temos

$$a\,\overbrace{e^{-\beta L}}^{>0}\underbrace{(e^{2\beta L} - 1)}_{\neq 0} = 0.$$

Portanto $a = b = 0$ e portanto $X(x) = 0$, o que não nos interessa.

III) Suponhamos $\sigma < 0$. Vamos representar tal número negativo por $\sigma = -\beta^2$ onde $\beta > 0$. Assim buscamos $X(x)$ não nula tal que

$$\begin{cases} X'' = -\beta^2 X \quad para \quad x \in [0, L] \\ X'(0) = 0 = X'(L). \end{cases} \tag{26}$$

Com as técnicas de equações diferenciais ordinárias temos que $X(x) = acos\beta x + bsen\beta x$ que junto com as condições de contorno nos dão:

$$X'(0) = \beta b = 0 \quad e \quad X'(L) = -a\beta sen\beta L = 0.$$

$\beta > 0$ e portanto $a = 0$. Veja que se $a = 0$ obtemos $X(x) = 0$ o que não nos interessa. Mas se $a \neq 0$ temos que $sen\beta L = 0$ o que implica que

$$\beta L = n\pi, \quad n = 1, 2, \cdots$$

Com isso, como antes fazemos $a = 1$ e encontramos infinitas funções não nulas, $X_n(x)$:

$$X_n(x) = cos\frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, \cdots \quad correspondentes\ a\ \ \sigma_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}.$$

Como $\sigma = 0$ nos deu a solução não nula $X_0(x) = \dfrac{1}{2}$ podemos tomar n à partir de 0 na representação de $\sigma_n = -\dfrac{n^2\pi^2}{L^2}$. E para cada σ_n temos correspondente equação

$$T_n'(t) = \alpha^2\frac{n^2\pi^2}{L^2}T_n(t)\ \ e\ solução$$

$$T_n(t) = ae^{\frac{-\alpha^2 n^2\pi^2}{l^2}t}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, a \in \mathbb{R}.$$

Como estamos interessados numa base de soluções, portanto seus elementos podem estar multiplicados por qualquer constante não nula, tomaremos $a = 1$ e em resumo concluímos que:

para cada $\sigma_n = -\dfrac{n^2\pi^2}{L^2}, n = 0, 1, 2, \cdots$ *as funções* $u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$ *isto é,*

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2} \quad e \quad u_n(x,t) = e^{\frac{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t}{L^2}} cos\frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

formam a base procurada para o conjunto de soluções $\mathcal{S}$ *de* $\mathcal{P}_{\mathcal{II}}$*. Deste modo, cada solução de*

$$\mathcal{P}_{\mathcal{II}} = \begin{cases} u_t(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t) & para \quad x \in \,]0, L[, \quad t > 0, \\ u_x(0,t) = 0 = u_x(L,t) & para\ todo \quad t > 0. \end{cases}$$

será "combinação linear" de elementos da base, isto é,

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\frac{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t}{L^2}} \cos\frac{n\pi x}{L}, \quad a_n \in \mathbb{R} \tag{27}$$

Como no caso de Dirichlet, só será possível determinar (a_n) *se conhecermos a distribuição inicial de temperatura na barra. Assim se* $u(x,0) = f(x)$ *concluímos que*

$$u(x,0) = f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\frac{-\alpha^2 n^2 \pi^2 0}{L^2}} cos\frac{n\pi x}{L} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\frac{n\pi x}{L}$$

isto é, precisamos da representação de $f(x)$ *em série de cossenos e portanto*

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx \quad e \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) cos\frac{n\pi x}{L}dx, \quad n = 1, 2, \cdots$$

Exemplo III.15. *Suponhamos que uma barra de comprimento* π*, fina e homogênea e com constante de difusibilidade térmica* 4*, esteja totalmente termicamente isolada. Suponha ainda que a distribuição inicial de temperatura em cada ponto da barra seja dada pela função* $f(x) = x$*. Determine o problema que descreve esta situação e dê sua solução.*

Se a barra tem comprimento $L = \pi$*, constante de difusibilidade térmica* $\alpha^2 = 4$*, está totalmente termicamente isolada e se* $u(x,t)$ *é sua temperatura num ponto* x *e instante* t*, então:*

$$\begin{cases} u_t(x,t) = 2^2 u_{xx}(x,t) & para \quad x \in \,]0, \pi[, \quad t > 0, \\ u_x(0,t) = 0 = u_x(\pi,t) & para\ todo \quad t > 0, \\ u(x,0) = x & para\ todo \quad x \in \ [0, \pi]. \end{cases}$$

então vimos que

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-4n^2 t} cos nx$$

onde para $n = 1, 2, \cdots$ *temos*

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \pi \quad e \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)cosnxdx = \frac{2[(-1)^n - 1]}{\pi n^2}.$$

Como $a_{2n} = 0$ *teremos que*

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}e^{-4(2n-1)^2t}cos(2n-1)x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}e^{-4(2n-1)^2t}cos(2n-1)x.$$

III.9.1 Interpretação Física das soluções estacionárias

Vamos verificar o que ocorre com a temperatura da barra com temperaturas fixadas nos extremos e na barra totalmente termicamente isolada, num futuro longínquo isto é, quando $t \to \infty$.

I) A barra com temperaturas fixas nas extremidades tem problema e solução dados por:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t) & para \quad x \in \,]0, L[, \quad t > 0, \\ u(0,t) = T_1, \quad u(L,t) = T_2 & para\ todo \quad t > 0, \\ u(x,0) = f(x) & para\ todo \quad x \in \ [0, L]. \end{cases}$$

$$u(x,t) = \left[\frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1\right] + \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{\frac{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t}{L^2}} sen\frac{n\pi x}{L} = v(x) + w(x,t)$$

onde $v(x)$ *é a* **solução estacionária** *do problema e* $w(x,t)$ *é a solução do problema homogêneo associado, lembrando que* b_n *é o* n^o *coeficiente de Fourier em senos de* $f(x) - v(x)$. $w(x,t)$ *é denominada* **solução transiente** *do problema.*

Não vamos justificar matematicamente, mas observe o fato que as parcelas da somatória aparecem multiplicadas pelo fator $e^{\frac{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t}{L^2}}$ *cujo limite tende a zero quando* $t \to \infty$, *para todo* $n = 1, 2, \cdots$. *Deste modo podemos mostrar que para todo ponto da barra, isto é, para todo* $x \in [0, L]$ *temos*

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \left[\frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1\right] + \lim_{t\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{\frac{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t}{L^2}} sen\frac{n\pi x}{L} = \frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1 = v(x)$$

isto é, após "muito" tempo a temperatura da barra, com condição de Dirichlet, tende a temperatura estacionária ou de equilíbrio, e isso independentemente da temperatura inicial. Logo a temperatura na barra, tende a se homogenizar com base nas temperaturas estabelecidas *nas extremidades da barra. Já $w(x,t)$ se esvanece com o passar do tempo, e por isso é dita* **solução transiente do problema**. *Embora façamos $t \to \infty$,* **na prática ou seja, em situações concretas**, *dependendo do material da barra e para t relativamente pequeno, $u(x,t)$ estará muito próxima de $v(x)$.*

II) A barra totalmente isolada termicamente tem problema e correspondente solução dados por:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t) & para \quad x \in \,]0, L[, \quad t > 0, \\ u_x(0,t) = 0 = u_x(L,t) & para\ todo \quad t > 0, \\ u(x,0) = f(x) & para\ todo \quad x \in \ [0, L]. \end{cases}$$

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\frac{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t}{L^2}} cos \frac{n\pi x}{L}$$

com a_n coeficiente de Fourier em cossenos de $f(x)$.

Como antes, podemos mostrar que

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\frac{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t}{L^2}} cos \frac{n\pi x}{L} \right] = \frac{a_0}{2}.$$

Mas veja que as soluções estacionárias, ou de equilíbrio, do problema de Neumann homogêneo são as funções que satisfazem

$$\begin{cases} u''(x) = 0 \quad para \quad x \in \,]0, L[, \\ u'(0) = u'(L) = 0. \end{cases}$$

e consequentemente $u(x) = constante$. Em particular $u(x) = \dfrac{a_0}{2}$ é uma solução de equilíbrio do problema. Assim, após muito tempo, a temperatura da barra isolada termicamente, tenderá a solução de equilíbrio constante e igual à **média integral da temperatura inicial da barra**, *isto é,*

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{L} \int_0^L f(x)dx.$$

Veja que neste caso a solução tende a se homegenizar em torno de uma constante que depende unicamente da condição, ou melhor, da temperatura inicial da barra.

Comparando-se os dois casos, vemos que o que ditará o estado de equilíbrio na barra totalmente termicamente isolada é sua temperatura inicial. Diferente do que ocorre no caso em que a barra tem temperaturas prescritas em suas extremidades. Neste caso a temperatura inicial NÃO influenciará seu estado de equilíbrio, mas sim os valores prescritos em suas extremidades.

Exercício III.10. *Considere duas barras idênticas de comprimento $L = 1$, onde uma está termicamente isolada e a outra tem suas temperaturas prescritas nas extremidades por $T_1 = 5^oC$ e $T_2 = 10^oC$. Se ambas têm temperaturas iniciais dadas por $f(x) = x^2 - 1$ determine a temperatura no ponto médio de cada barra, decorridos muito "tempo" após o início da observação.*

III.9.2 Apêndice IV- Um modelo simplificado de reatores nucleares

O núcleo de um reator consiste de uma mistura de um material fissil, por exemplo, ${}^{235}U_{92}$ e um moderador, por exemplo ${}^{12}C_6$ - grafite. O comportamento deste reator fica determinado pela densidade de neutrons no seu núcleo.

Um modelo simplificado para um reator cujo núcleo seja uma barra bastante longa de comprimento $L > 0$, é dado por:

$$\begin{aligned} &u_t = \alpha^2 u_{xx} + \alpha^2 \lambda^2 u, \quad x \in (0, L), \quad t > 0 \\ &u(0, t) = 0 = u(L, t), \quad t > 0 \\ &u(x, 0) = f(x) \geq 0, \quad\quad x \in (0, L) \end{aligned} \tag{28}$$

onde $u(x, t)$ = densidade de neutrons no núcleo do reator, $\alpha, \lambda > 0$. Um processo similar ao de difusão está presente no primeiro termo da equação diferencial. Já o termo $\alpha^2\lambda^2 u$, diz respeito à uma fonte de neutrons que cresce à uma taxa proporcional à densidade $u(x, t)$, devido ao processo de fissão. λ é chamada de constante de fissão e é determinada empiricamente para cada mistura específica de material físsil e moderador. Além disso, observe que $f(x)$ denota a densidade inicial de neutrons no núcleo do reator e portanto não pode ser negativa.

Podemos buscar a solução deste problema utilizando o Método da separação de variáveis, mas utilizaremos um método mais rápido. Uma mudança de variáveis que tornará este problema num outro já conhecido.

Então buscaremos solução na forma $u(x,t) = e^{\alpha^2\lambda^2 t}v(x,t)$. *Veja que:*

$u_t = \alpha^2\lambda^2 e^{\alpha^2\lambda^2 t}v + e^{\alpha^2\lambda^2 t}v_t$.

$u_{xx} = e^{\alpha^2\lambda^2 t}v_{xx}$. *Substituindo na equação diferencial dada em (28) obtemos:*

$\alpha^2\lambda^2 e^{\alpha^2\lambda^2 t}v + e^{\alpha^2\lambda^2 t}v_t = \alpha^2 e^{\alpha^2\lambda^2 t}v_{xx} + \alpha^2\lambda^2 e^{\alpha^2\lambda^2 t}v$ *o que nos dá:*

$$v_t = \alpha^2 v_{xx}$$

É fácil ver que $v(x,t)$ *satisfaz:*

$$\begin{aligned} &v_t = \alpha^2 v_{xx}, && x \in (0,L), \quad t > 0 \\ &v(0,t) = 0 = v(L,t), && t > 0 \\ &v(x,0) = f(x), && x \in (0,L) \end{aligned} \tag{29}$$

cuja solução sabemos ser $v(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{\frac{-\alpha^2 n^2\pi^2 t}{L^2}} sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, *onde* b_n *é o* n^o *coeficiente de Fourier em senos, de* $f(x)$.

Concluímos então que a densidade de neutrons neste reator será dada por:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{\alpha^2 P_n t} sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \text{ onde } P_n = \lambda^2 - \frac{n^2\pi^2}{L^2}.$$

O valor de λ *é crucial para o comportamento do reator. Vejamos algumas situações abaixo:*

a) Se $\lambda < \dfrac{\pi}{L}$ *então* $P_n \leq P_1 = \lambda^2 - \dfrac{\pi^2}{L^2} < 0$ *para todo* $n \geq 1$ *e assim,* $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t) = 0$. *Isto é, a densidade de neutrons no reator tenderá a zero com o passar do tempo.*

b) Se $\lambda = \dfrac{\pi}{L}$ *então* $P_1 = 0$ *e* $P_n = (1-n^2)\dfrac{\pi^2}{L^2} < 0$ *para* $n \geq 2$, *e então:*

$$u(x,t) = b_1 sen\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \sum_{n=2}^{\infty} b_n e^{\alpha^2 P_n t} sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Note que quando $t \to \infty$ *a parte da solução correspondente ao somatório, tenderá a zero. Deste modo,*

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = b_1 sen\left(\frac{\pi x}{L}\right), \quad x \in [0,L].$$

Note que:

$b_1 = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)dx > 0$ *já que* $f(x) > 0$, *e sen* $\left(\dfrac{\pi x}{L}\right) > 0$ *para* $x \in (0, L)$. *Assim, com o passar do tempo, a densidade de neutrons se estabilizará e se concentrará mais no centro do núcleo do reator.*

c) Se $\dfrac{\pi}{L} < \lambda < \dfrac{2\pi}{L}$,

$$u(x,t) = b_1 e^{\alpha^2 P_1} sen\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \sum_{n=2}^{\infty} b_n e^{\alpha^2 P_n t} L^2 sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Como antes, a parcela correspondente ao somatório, a partir de $n = 2$, *tenderá a zero quando* $t \to \infty$, *já que* $P_n < 0$ *para* $n \geq 2$.

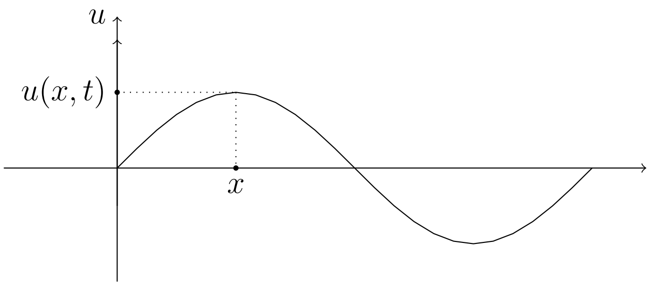
Mas $P_1 > 0$. *E mais, já vimos que* $b_1 sen\left(\dfrac{\pi x}{L}\right) > 0$ *para* $x \in (0, L)$. *Assim:*

$$\lim_{t \to \infty} u(x,t) = \infty \text{ se } x \in (0, L)$$

e neste caso o reator tornou-se uma BOMBA!

III.10 Aula 26 - A corda vibrante

Consideremos agora uma corda elástica de comprimento $L > 0$, perfeitamente flexível, fina e de material homogêneo, sujeita a pequenas vibrações transversais no plano.



Suponha que a corda esteja sujeita apenas à força de tensão. Fixando as suas extremidades, podemos mostrar que se

$$u(x,t) = \text{ posição do ponto } x \text{ da corda no instante } t,$$

então o problema que modela o movimento da corda será dado por

$$\mathcal{P}_{III} = \begin{cases} u_{tt} = \alpha^2 u_{xx} & \text{para} \quad x \in \,]0,L[, \quad t > 0 \\ u(0,t) = 0 = u(L,t) & \text{para} \quad t > 0. \end{cases} \tag{30}$$

onde

$$\alpha^2 = \frac{T}{\sigma}$$

é a constante de elasticidade da corda e é dada pelo quociente da tensão na corda, pela sua densidade de massa. A posição $u = 0$ é dita posição de equilíbrio da corda, enquanto que $u_t = 0$ indica que a corda está em repouso.

Como no caso do Problema do calor na barra, o problema $\mathcal{P}_{III}$ é um problema linear e homogêneo(Exercício). Assim o conjunto $\mathcal{S}$ das suas soluções é um espaço vetorial e portanto possui uma base. Para determiná-la, como antes, utilizamos o Método da Separação de Variáveis. Assim buscamos soluções da forma $u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$. Substituindo-a em $\mathcal{P}_{III}$ obtemos

$$X(x)T''(t) = \alpha^2 X''(x)T(t) \quad \text{para} \quad x \in \,]0,L[\quad e \quad t > 0.$$

Como $X(x) \neq 0 \neq T(t)$ temos

$$\frac{T''(t)}{\alpha^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad \text{para} \quad x \in \,]0,L[\quad e \quad t > 0.$$

Como antes, como t e x são variáveis independentes uma função de x só será igual a uma função de t se elas forem constantes, assim deve existir constante $\sigma \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{T''(t)}{\alpha^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \sigma \quad para \quad x \in \,]0, L[\quad e \quad t > 0.$$

que separaremos em duas equações

$$X'' = \sigma X \quad e \quad T'' = \sigma \alpha^2 T.$$

Mas, uma vez que a condição de contorno está fixada em $u(0,t) = 0 = u(L,t)$ para todo $t > 0$, como antes concluímos que

$$X(0) = 0 = X(L).$$

Assim temos a missão de determinar $X(x) \neq 0 \neq T(t)$ soluções de

$$\begin{cases} X'' = \sigma X \quad para \quad x \in [0, L] \\ X(0) = 0 = X(L). \end{cases} \quad e \quad T''(t) = \alpha^2 \sigma T(t).$$

Note que o primeiro problema já foi estudado no Problema do Calor com condição de Dirichlet homogênea. Assim já sabemos que as únicas soluções não nulas serão obtidas para

$$\sigma_n = -\frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

nos dando as correspondentes soluções

$$X_n(x) = sen \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

Já a segunda equação, com as técnicas de resolução de equações diferenciais ordinárias nos dão, para cada σ_n,:

$$T_n(t) = a_n cos \frac{n\alpha\pi t}{L} + b_n sen \frac{n\alpha\pi t}{L}.$$

Deste modo as soluções de $\mathcal{P}_{III}$ serão "combinações lineares" de

$$u_n(x,t) = \left[a_n cos \frac{n\alpha\pi t}{L} + b_n sen \frac{n\alpha\pi t}{L} \right] sen \frac{n\pi x}{L}, \quad an, b_n \in \mathbb{R}.$$

isto é, a solução geral de

$$\mathcal{P}_{III} = \begin{cases} u_{tt} = \alpha^2 u_{xx} & para \quad x \in \,]0, L[, \quad t > 0 \\ u(0,t) = 0 = u(L,t) & para \quad t > 0. \end{cases}$$

será

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n cos\frac{n\alpha\pi t}{L}+b_n sen\frac{n\alpha\pi t}{L}\right]sen\frac{n\pi x}{L}. \tag{31}$$

Observe que no problema correspondente do calor, as funções em t eram exponenciais com expoentes negativos, que tendiam a zero quando $t\to\infty$. Já aqui, os termos em t são combinações de senos e cossenos o que indica o carater oscilatório da corda.

III.10.1 Solução do problema de valor inicial

Para determinarmos os a_n's e b_n's precisamos conhecer o estado inicial em que a corda se encontra. Como a equação que modela o problema envolve a segunda derivadade u isto é u_{tt}, que é a aceleração do ponto x da corda no instante t, precisaremos prescrever as posição e velocidade iniciais da corda.

$$u(x,0)=f(x)\quad u_t(x,0)=g(x)\qquad \textit{para}\quad x\in[0,L].$$

dando-nos o problema de valor inicial e de contorno:

$$\begin{cases} u_{tt}=\alpha^2u_{xx} & \textit{para}\quad x\in\,]0,L[,\quad t>0\\ u(0,t)=0=u(L,t) & \textit{para}\quad t>0,\\ u(x,0)=f(x) & \textit{para}\quad x\in\ [0,L],\\ u_t(x,0)=g(x) & \textit{para}\quad x\in\ [0,L]. \end{cases} \tag{32}$$

Substituindo a condição inicial na solução geral do problema temos:

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\alpha\pi 0}{L}+b_n\,\mathrm{sen}\,\frac{n\alpha\pi 0}{L}\right]\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}=f(x)$$

e

$$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{-n\alpha\pi}{L}a_n\,\mathrm{sen}\,\frac{n\alpha\pi 0}{L}+\frac{n\alpha\pi}{L}b_n\cos\frac{n\alpha\pi 0}{L}\right]\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\alpha\pi}{L}b_n\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}=g(x).$$

Assim precisamos das representações, em séries de Fourier de senos, de f e g e consequentemente, a solução do problema será

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\alpha\pi t}{L}+b_n sen\frac{n\alpha\pi t}{L}\right]\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}.$$

onde

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)sen\frac{n\pi x}{L}dx \quad e \quad b_n = \frac{2}{n\pi\alpha}\int_0^L g(x)sen\frac{n\pi x}{L}dx$$

Logo os coeficientes a_n dependem apenas da posição inicial da corda. Já os b_n dependem apenas da velocidade inicial da corda.

Exemplo III.16. *Suponha que uma corda de comprimento π, fina e de material homogêneo e com constante de elasticidade 4, esteja com suas extremidades presas. Suponha que ela seja posta a oscilar à partir do repouso, com posição inicial dada por $f(x) = 5senx$. Determine o problema que modela esta situação e dê sua solução.*

Pelos dados do problema temos que $L = \pi$ e $\alpha^2 = 4$. Sua posição inicial é $u(x, 0) = senx$ e como ela parte do repouso, sua velocidade inicial é nula, isto é, $u_t(x, 0) = 0$. Logo o problema que modela tal situação é

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} & para \quad x \in]0, \pi[, \quad t > 0 \\ u(0, t) = 0 = u(\pi, t) & para \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 5senx & para \quad x \in [0, \pi], \\ u_t(x, 0) = 0 & para \quad x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

De (31) temos

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n cos2nt + b_n sen2nt]\, sennx.$$

Mas como a corda está em repouso $b_n = 0$ pois

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^\pi 0sennxdx = 0$$

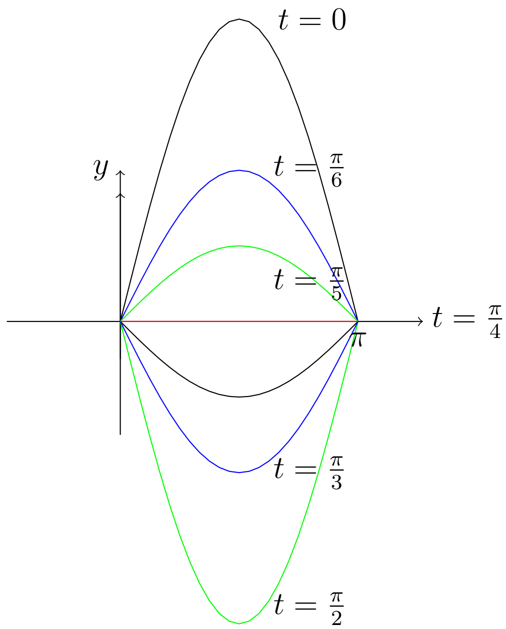
Além disso $f(x) = 5senx$ já está em série de senos e

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi senxsennxdx = \begin{cases} 0 & se \quad n \neq 1 \\ 5 & se \quad n = 1 \end{cases}$$

Logo a solução do problema é

$$u(x, t) = 5cos2t\ senx.$$

Analisemos a solução para alguns valores de t:



Vemos que a solução é periódica em t, (neste caso o período é π). Além disso a oscilação da corda terá amplitude máxima para $t = n\dfrac{\pi}{2}$ e passará pela posição de equilíbrio sempre que $t = (2n-1)\frac{\pi}{4}, \quad n = 1, 2, \cdots$

Exemplo III.17. *Suponha que estamos com a corda do exemplo anterior, nas mesmas condições que antes, mas a posição inicial da corda seja dada por $f(x) = x$. Determine o problema que modela esta situação e dê sua solução.*

De modo análogo o problema é modelado por

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} & \textit{para} \quad x \in \,]0, \pi[, \quad t > 0 \\ u(0,t) = 0 = u(\pi, t) & \textit{para} \quad t > 0, \\ u(x,0) = x & \textit{para} \quad x \in \ [0, \pi], \\ u_t(x,0) = 0 & \textit{para} \quad x \in \ [0, \pi]. \end{cases}$$

Novamente $b_n = 0$ mas

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} nx dx \overset{(11)}{=} \frac{2}{n}(-1)^{n+1}.$$

Logo a solução do problema é

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1} cos 2nt \ sen nx.$$

Exercício III.11. (É importante fazê-lo!) *A corda finita com extremidades livres:*

a) Suponha termos uma corda de tamanho $L > 0$, fina, de material homogêneo e perfeitamente flexível, com coeficiente de elasticidade $\alpha^2 = \dfrac{T}{\sigma} > 0$. Suponha que suas extremidades estejam livres e que ela oscile no plano e esteja sujeita apenas a tensão.

Podemos mostrar que tal problema é dado por

$$\mathcal{P}_{\mathcal{IV}} \begin{cases} u_{tt} = \alpha^2 u_{xx} & para \quad x \in \,]0, L[, \quad t > 0 \\ u_x(0,t) = 0 = u_x(L,t) & para \quad t > 0. \end{cases} \tag{33}$$

Mostre que $\mathcal{P}_{\mathcal{IV}}$ é um problema linear homogêneo.

b) Mostre que a solução geral do problema é

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \frac{b_0 t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n cos n \frac{\alpha n \pi t}{L} + a_n sen n \frac{\alpha n \pi t}{L} \right) cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \tag{34}$$

c) Se $u(x,0) = f(x)$ e $u_t(x,0) = g(x)$ qual a solução do problema de valor inicial e de contorno:

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} & para \quad x \in \,]0, \pi[, \quad t > 0 \\ u_x(0,t) = 0 = u_x(\pi,t) & para \quad t > 0, \\ u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x) \quad para \quad x \in [0, L]. \end{cases}$$

d) Qual a solução do problema acima quando, $\alpha^2 = 9$, $L = 1$ e a corda começar a oscilar à partir da posição de equilíbrio com velocidade igual a $g(x) = x$.

e) E se a velocidade for constante e igual a 5?

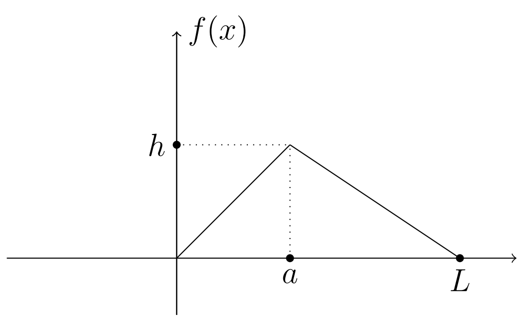
III.10.2 Apêndice V - A corda dedilhada

Suponhamos que a corda de um violão tenha comprimento L. Suponha que no seu ponto $x = a$ ela seja puxada até uma certa distância h e depois solta a partir do repouso.

Este problema é chamado problema da corda dedilhada e é descrito por

$$\begin{cases} u_{tt} = \alpha^2 u_{xx} & x \in]0, L[, \quad t > 0 \\ u(0,t) = 0 = u(L,t), & t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & x \in [0, L], \\ u_t(x,0) = 0, & x \in [0, L]. \end{cases} \tag{35}$$

onde
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{hx}{a}, & se\ x \in [0, a], \\ \dfrac{h(x-a)}{a-L} + h & se\ x \in [a, L]. \end{cases}$$



Como a velocidade inicial é nula, sabemos que a solução deste problema é da forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\frac{n\pi\alpha t}{L} sen\frac{n\pi x}{L}$$

onde
$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) sen\frac{n\pi x}{L} dx.$$

Fazendo as contas, obtemos

$$a_n = \frac{2h}{a(L-a)}\frac{L^2}{n^2\pi^2} sen\frac{n\pi a}{L}.$$

Definição III.10.1. *Seja o problema da corda dedilhada descrito acima. Então o seu $n-$ésimo harmônico ou supertônica é a função*

$$u_n(x,t) = \frac{2h}{a(L-a)}\frac{L^2}{n^2\pi^2} sen\frac{n\pi a}{L} cos\frac{n\pi\alpha t}{L} sen\frac{n\pi x}{L}.$$

em particular, o primeiro harmônico recebe o nome de harmônico fundamental ou tônica principal

$$u_1(x,t) = \frac{2h}{a(L-a)}\frac{L^2}{\pi^2} sen\frac{\pi a}{L} cos\frac{\pi\alpha t}{L} sen\frac{\pi x}{L}.$$

Observe assim que a vibração da corda com o passar do tempo, será uma superposição de tônicas já que $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$.

Veja que a variação em t dá o comportamento da corda com o passar do tempo. Analisando cada supertônica, vemos que

$$T_n = \frac{2\pi}{\frac{n\pi\alpha}{L}} = \frac{2L}{n\alpha}$$

é o período de oscilação da supertônica e portanto

$$\omega_n = \frac{n\alpha}{2L} = n\omega_1 \quad \textit{sua correspondente frequência.} \tag{36}$$

Assim, quanto maior for n, maior será a frequência da oscilação. Como o movimento de oscilação da corda provoca um som, quanto maior for a frequência de oscilação mais agudo será o som por ela produzido.

As frequências das supertônicas serão sempre múltiplas inteiras da frequência fundamental. Por isso, o correspondente som vindo destas, será mais agudo que o da frequência fundamental. Como nossos ouvidos estão aparelhados para ouvir apenas uma faixa de frequências(entre 20 e 20.000 Hz), nunca conseguimos ouvir o som correspondente a uma série de Fourier com infinitos termos. Em geral percebemos apenas os primeiros termos da série. Os ouvidos mais jovens e sensíveis são os que captam frequências mais altas. Isso por que nossos ouvidos são dotados de receptores, cada qual sensível a uma frequência. E os mais delgados são os que captam os sons mais agudos, e por isso são os primeiros a serem danificados, principalmente quando expostos a ruídos ou sons muito intensos(volume muito *alto). Por isso as crianças ouvem melhor os sons agudos do que os idosos(e que muitos jovens que usam fones de ouvido e costumam ouvir música no último volume).*

Cada receptor de nosso sistema auditivo, percebe a vibração de um tipo de frequência. Assim o som que ouvimos é percebido pela superposição de frequências, nos vários receptores que temos, para ser decodificado como um som único no nosso cérebro.

O som produzido pela superposičao de frequências, múltiplas inteiras de outra, será um som harmônico. E os produzidos por frequências que não são múltiplas inteiras de outras são os dissonantes.

Esta relação curiosa já havia sido percebida por Pitágoras, fazendo cordas de diferentes tamanhos L vibrarem. De fato, observando-se (36) é fácil ver que alterando-se o comprimento L da corda obtemos frequências diferentes. Estas serão harmônicas entre si ou não. Dividindo-se L por um número inteiro estas sempre originarão frequências harmônicas em relação à original.

Outra forma de se obter frequências diferentes é alterando-se $\alpha^2 = \dfrac{T}{\sigma}$. *Vemos que a frequência do som será proporcional à raiz quadrada da tensão na corda e inversamente proporcional à raiz quadrada da densidade de massa da corda.*

É incrível como a Matemática, a Física e a Fisiologia humana se casam para explicar o som que percebemos diariamente!

III.11 Lista 5 de Exercícios - Equação do Calor e Equação da Onda

1. **Relembrando o último exercício da Lista 4:**

Sejam as funções abaixo:

a) $f(x) = 25,\ para\ x \in [0, \pi]$ *b)* $f(x) = senx,\ para\ x \in [0, \pi]$

c) $f(x) = x^2,\ para\ x \in [0, \pi]$ *d)* $f(x) = cosx,\ para\ x \in [0, \pi]$.

e) $f(x) = \begin{cases} x, & se \quad 0 \leq x \leq \pi/2 \\ \pi - x, & se \quad \pi/2 < x < \pi \end{cases}$

f) $f(x) = |2x - \pi|,\ para\ x \in]0, \pi[$.

I) Escreva suas representações em série de Fourier em senos.

II) Escreva suas representações em série de Fourier em cossenos.

2. Resolva a equação do calor nos casos abaixo. Utilize $f(x)$ *e suas respectivas séries calculadas no exercício acima:*

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}\,; \quad (x,t) \in [0\pi] \times (0, \infty), \\ u(0,t) = 0 = u(\pi, t), \quad t \in [0, \infty), \\ u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, \pi]. \end{cases} \tag{37}$$

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}\,; \quad (x,t) \in [0\pi] \times (0, \infty), \\ u_x(0,t) = 0 = u_x(\pi, t), \quad t \in [0, \infty), \\ u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, \pi]. \end{cases} \tag{38}$$

3. Nos problemas dados em (37) e (38)para onde converge suas respectivas soluções, quando $t \to \infty$*? Compare os resultados obtidos para cada condição inicial e de fronteira e explique fisicamente o que ocorre em cada situação.*

4. a) Encontre a solução geral do problema abaixo usando separação de variáveis:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}\,; \quad (x,t) \in (0, L)(\times 0, \infty), \\ u(0,t) = 0 = u_x(L, t), \quad t \in [0, \infty). \end{cases} \tag{39}$$

b) Use o exercício 17) dda Lista 4, para fornecer a solução do problema anterior, quando $u(x,0) = x$ para $x \in [0, L]$.

5. *(a) Encontre uma solução estacionária para o problema*

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + senx, \quad em\ (0,\pi)\times(0,+\infty), \\ u(0,t) = 1, \quad t \geq 0 \\ u_x(\pi,t) = 2, \quad t \geq 0 \end{cases}, \tag{40}$$

isto é, encontre uma função v que independe de t e que seja solução do problema acima.

(b) Se a solução de (40) tiver a forma $u(x,t) = v(x) + w(x,t)$ onde v é a função encontrada no item anterior, mostre que w satisfaz o problema dado em (39), com $a = 1$.

(c) Determine a solução de

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + senx, \quad em\ (0,\pi)\times(0,+\infty), \\ u(0,t) = 1, \quad t \geq 0 \\ u_x(\pi,t) = 2, \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = 1 + \operatorname{sen} x, \quad x \in [0,\pi]. \end{cases} \tag{41}$$

6. *a) Calcule a solução estacionária de:*

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}\,; \quad (t,x) \in (0,\infty)\times[0,\pi], \\ u(0,t) = -1; \quad u(\pi,t) = 1, \quad t \in (0,\infty), \end{cases} \tag{42}$$

b) Use a parte a) para encontrar as soluções dos problemas abaixo:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}\,; \quad (t,x) \in (0,\infty)\times[0,\pi], \\ u(0,t) = -1; \quad u(\pi,t) = 1, \quad t \in (0,\infty), \\ u(x,0) = 1 \end{cases} \tag{43}$$

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}\,; \quad (t,x) \in (0,\infty)\times[0,\pi], \\ u(0,t) = -1; \quad u(\pi,t) = 1, \quad t \in (0,\infty), \\ u(x,0) = 2x - 1 \end{cases} \tag{44}$$

c) Para onde as soluções do item b) convergem quando $t \to \infty$?

7. *Determine a solução geral do problema*

$$\begin{cases} \frac{1}{k}u_t = u_{xx} + \lambda u\,; & (x,t) \in [0,l] \times (0,\infty), \\ u(0,t) = 0 = u(l,t), & t \in [0,\infty). \end{cases} \tag{45}$$

Para isso, use separação de variáveis ou faça $u(x,t) = e^{k\lambda t}v(x,t)$ e verifique que $v(x,t)$ satisfaz um problema de solução já conhecida.

8. *Encontre as soluções dos problemas da onda abaixo, utilizando $f(x)$ bem como suas séries, calculadas no primeiro exercício desta lista.*

a)

$$\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx}\,; & (x,t) \in [0,\pi] \times (0,\infty), \\ u(0,t) = 0 = u(\pi,t), & t \in [0,\infty), \\ u(x,0) = f(x), \\ u_t(x,0) = 0. \quad x \in [0,\pi]. \end{cases} \tag{46}$$

b)

$$\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx}\,; & (x,t) \in [0,\pi] \times (0,\infty), \\ u(0,t) = 0 = u(\pi,t), & t \in (0,\infty), \\ u(x,0) = 0, \\ u_t(x,0) = f(x) \quad x \in [0,\pi]. \end{cases} \tag{47}$$

c)

$$\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx}\,; & (x,t) \in [0,\pi] \times (0,\infty), \\ u(0,t) = 0 = u(\pi,t), & t \in [0,\infty), \\ u(x,0) = f(x), \\ u_t(x,0) = f(x) \quad x \in [0,\pi]. \end{cases} \tag{48}$$

9. *Seja*

$$\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx}\,; & (x,t) \in [0,\pi] \times (0,\infty), \\ u(0,t) = 0 = u(\pi,t), & t \in [0,\infty). \end{cases} \tag{49}$$

Altere uma condição deste problema para que a frequência fundamental da solução passe a ter o valor 10. *Faça isso de dois modos diferentes.*

]

APLICAÇÕES

1. *(Boyce Section 10.3 page 563) Este problema indica como séries de Fourier podem ser utilizadas para resolver problemas de valores iniciais em E.D.O. com termo forçante periódico).*

   (a) *(Problema 13, Boyce, Section 10.3, page 563) Encontre a solução do problema de valor inicial*
   $$y'' + \omega^2 y = \sin(nt), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$
   onde n é um inteiro positivo e $\omega^2 \neq n^2$. O que acontece se $\omega^2 = n^2$.

   (b) *(Problema 14, Boyce, Section 10.3, page 563) Encontre a solução do problema de valor inicial*
   $$y'' + \omega^2 y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$
   onde $\omega > 0$ não é igual a um inteiro positivo. Como é a solução se $\omega = n$ para algum inteiro positivo n?

   (c) *(Problema 15, Boyce, Section 10.3, page 563) Encontre a solução do problema de valor inicial*
   $$y'' + \omega^2 y = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$
   onde f é periódica com período 2π e
   $$f(t) = \begin{cases} 1 & se\ 0 < t < \pi \\ 0 & se\ t = 0, \pi, 2\pi \\ -1 & se\ \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

   (d) *(Problema 16, Boyce, Section 10.3, page 563) Encontre a solução do problema de valor inicial*
   $$y'' + \omega^2 y = f(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$
   onde f é periódica com período 2π e
   $$f(t) = \begin{cases} 1 - t & se\ 0 < t < 1 \\ -1 + t & se\ 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

2. *Considere a condução de calor em uma barra de comprimento 40 cm cujas extremidades são mantidas a $0°C$ para todo $t > 0$. Nos problemas a seguir encontre a expressão da temperatura $u(x,t)$ se a distribuição de temperatura inicial da barra é a função dada. Suponha a constante de difusibilidade igual a 1.*

   - *(Problema 9, Boyce, Section 10.5, page 579)* $u(x,0) = 50, 0 < x < 40$.
   - *(Problema 10, Boyce, Section 10.5, page 579)* $u(x,0) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 20 \\ 40 - x, & 20 \le x \le 40 \end{cases}$

3. *(Problema 14, Boyce, Section 10.5, page 579) Ainda sobre a barra considerada no (Problema 9, Boyce, Section 10.5, page 579),*

   (a) *Esboce o gráfico de* u *versus* x *para* $t = 5,\ 10,\ 20,\ 40$ *e* 200. *Ponha todos os gráficos num mesmo sistema cartesiano e analise como a temperatura muda com o tempo.*

   (b) *Esboce o gráfico de* u *versus* t *para* $x = 5,\ 10$ *e* 20.

   (c) *Esboce o gráfico em dimensão 3 de* u *versus* t *e* x.

   (d) *Quanto tempo leva para a barra ficar a uma temperatura inferior a* $1°\ C$*?*

4. *(Problema do calor em uma barra com extremidades isoladas) Use o Método de separação de variáveis para encontrar a solução do problema de calor quando as extremidades da barra estão isoladas (condição de Neumann). Para isso, siga os passos a seguir para exibir uma fórmula da solução do problema do calor com condição de Neumann:*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & 0 < x < \pi,\ t > 0 \quad \textit{(Equação do Calor)} \\ u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0, & t \ge 0 \quad \textit{(Fluxo zero nas extremidades)} \\ u(0,x) = f(x), & 0 \le x \le \pi \quad \textit{(Condição inicial)} \end{cases}$$

   (a) *Use o método de separação de variáveis* $u(t,x) = T(t)X(x)$ *para obter*

$$T'' + \lambda T = 0 \qquad e \qquad \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X'(L) = 0 \end{cases}$$

   (b) *Verifique que* $\lambda = 0$ *ou* $\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, $n \in \mathbb{N}$, *e que para cada* $n \in N \cup \{0\}$ *as respectivas soluções são*

$$X_0(x) = 1, \quad T_0(t) = 1, \quad X_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad T_n(t) = e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

(c) *Defina* $u_0(t,x) = T_0(t)X_0(x) = 1/2$ *e* $u_n(t,x) = T_n(t)X_n(x) = e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, *e considere*

$$u(t,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(t,x).$$

(d) *Verifique que se* $f \in C([0,L])$ *isto é,* f *é função contínua em* $[0,L]$, *é diferenciável, exceto um número finito de pontos, e* f' *é contínua por partes, então* u *satisfaz* $u(0,x) = f(x)$, $x \in [0,L]$, *desde que* a_n *sejam os coeficientes de Fourier da sua série de Fourier de cossenos de* f *(aproveite para discutir a necessidade de estender a função* f *a toda reta a uma função par, contínua e periódica de período* $2L$.

(e) *Escreva a expressão da função* $u(x,t)$ *candidata a solução calor com condição de Neumann.*

(f) *Note que se* $f(x) = k$, *uma constante, então* $u(x,t) = k$.

(g) *Estude o limite* $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$ *e interprete o resultado obtido.*

5. *Use o problema anterior para encontrar a solução do problema:*

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < \pi,\ 0 < t < \infty \\ u_x(0,t) = 0,\ u_x(\pi,t) = 0, & 0 \le t < \infty \\ u(x,0) = f(x), & 0 \le x \le \pi, \end{cases}$$

onde a condição inicial é dada por $f(x) = \begin{cases} x & se\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & se\ \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$

6. *(Problema 15, Boyce, Section 10.6, page 589) Considere uma barra de comprimento* L *com temperatura incial* $u(x,0) = f(x)$, $0 \le x \le L$. *Suponha que na extremidade* $x = 0$ *a temperatura é 0, enquanto que a extremidade* L *está isolada. Encontre temperatura* $u(x,t)$. *Faça* $t \to \infty$ *para encontrar a temperatua estacionária.*

7. *Para o problema do reator nuclear (28) cuja solução foi dada por (**??**) determine as soluções de equilíbrio (ou estacionárias) nos casos em que*

a) $\lambda < \dfrac{\pi}{l}$.

b) $\lambda > \dfrac{\pi}{l}$. *Neste caso o reator tornou-se uma bomba.*

8. *(Problema 1, Boyce, Section 10.7, page 600) Considere uma corda de comprimento L com as extremidades mantidas fixas. A corda é posta em movimento com velocidade incial nula a partir da posição inicial* $u(x,0) = f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{L}, 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \frac{2(L-x)}{L}, \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}$
Encontre o deslocamento $u(x,t)$

9. *(Problema 5, Boyce, Section 10.7, page 600) Considere uma corda de comprimento L com as extremidades mantidas fixas. A corda é posta em movimento a partir da posição de equilíbrio (*$u(x,0) = 0$*) com velocidade inicial* $u_t(x,0) = f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{L}, 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \frac{2(L-x)}{L}, \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}$.
Encontre o deslocamento $u(x,t)$.

10. *(Problema 9, Boyce, Section 10.7, page 601) Encontre o deslocamento* $u(x,t)$ *de uma corda de comprimento L fixada* $x = 0$ *(*$u(0,t) = 0$*) e livre em* $x = L$ *(*$u_x(L,t) = 0$*) e que posta em movimento a partir da posição inicial* $u(x,0) = f(x)$ *com velocidade nula.*

11. *(Problema 10, Boyce, Section 10.7, page 601) Encontre o deslocamento* $u(x,t)$ *de uma corda de comprimento L fixada* $x = 0$ *(*$u(0,t) = 0$*) e livre em* $x = L$ *(*$u_x(L,t) = 0$*) e que posta em movimento a partir da posição inicial* $u(x,0) = f(x)$ *com velocidade nula, onde* $f(x) = \begin{cases} 1, & L/2 - 1 < x < L/2 + 1 \quad (L > 2) \\ 0, & \textit{caso contrário} \end{cases}$.

    (a) *Encontre o deslocamento* $u(x,t)$

    (b) *Com* $L = 10$ *e* $a = 1$*, esboce o gráfico de u versus x para* $0 \leq x \leq 10$ *e para vários valores de t. Dê particular atenção para os valores de t entre 3 e 7. Observe como o deslocamento inicial é refletido em cada extremo da corda.*

    (c) *Com* $L = 10$ *e* $a = 1$*, esboce o gráfico de u versus t para vários valores de x.*

    (d) *Construa uma animação da solução em relação a t para pelo menos um período.*

Referências Bibliográficas

[1] *H. Anton e C. Rorres,* Algebra Linear com Aplicações*, 10a. ed. Porto Alegre, Bookman 2012.*

[2] *W.E. Boyce e R.C. DiPrima,* Introduction to Ordinary Differential Equations*, John Wiley, New York, 1970.*

[3] *W.E. Boyce, R.C. DiPrima,* Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, John Wiley, New York, 1969.*

[4] *C. H. Edwards, D. E. Penney,* Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems*, Prentice-Hall International Editions, 1989.*

[5] *M. R. Cullen, D. G. Zill,* Equações Diferenciais*, vol. 1, 3 ed., Makron Books, 2001.*

[6] *D.G. Figueiredo,* Análise I*, 2 ed. Livro Técnico e Científico, 1996.*

[7] *H. L. Guidorizzi,* Um curso de Cálculo*, vol. 4, 5 ed., Livro Técnico e Científico, 2001.*

[8] *M. P. Matos,* Séries e equações diferenciais*, 1 ed. Prentice Hall, 2002.*

[9] *R.K. Nagle, E. B. Saff, A. D. Snider,* Equações diferenciais*, 8 ed. Pearson, 2012.*

[10] *G. B. Thomas,* Cálculo*, vol. 2, 10 ed., Addison-Wesley, 2002.*