5ª Lista de Exercícios de SMA356 - Cálculo 4

Eugenio Massa

Séries de potências

1. Componha uma série de potências cujo intervalo de convergência seja $(-11, 11)$ e uma cujo intervalo de convergência seja $(-2, 0)$.

2. Determine o conjunto de convergência das séries abaixo:
$a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-\sqrt{2})^{(2n+1)}}{2^n}$ $\quad b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x-1)^{(2n+1)}}{n!}$ $\quad c) \sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ $\quad d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x+2)^n}{n2^n}$
$e) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+1}}$ $\quad f) \sum_{n=0}^{\infty} e^{nx}$ $\quad g) \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sin(1/n)$ $\quad h) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3+n+2}{n^2+1} x^n$ $\quad i) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}\,(2x+3)^n$

3. Para quais x as séries **do exercício anterior** convergem absolutamente? Para quais x as séries convergem condicionalmente? em que conjuntos convergem uniformemente?

4. Determine o **intervalo de convergência** da série e, dentro desse intervalo, a soma da série.
$$a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^{(2n)}}{9^n}; \qquad b) \sum_{n=0}^{\infty} (\ln x)^n.$$

5. Seja $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ uma série de potências dada. Prove que:

a) se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = +\infty$, então o raio de convergência R da série é zero.

b) Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$, então o raio de convergência R da série é infinito.

c) Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = L \neq 0$, então o raio de convergência da série é $R = 1/L$.

6. Para qual função f(x) converge a série abaixo, e em qual conjunto?
$a) \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ $\quad b) \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2}$ $\quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{n+2}}$ $\quad d) \sum_{n=2}^{\infty} x^n n!.$

7. Suponha que a série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-1)^k$ convirja em $x = 3$. O que você pode dizer sobre a convergência ou divergência das séries a seguir?
$a) \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ $\quad b) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ $\quad c) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k 2^k$

8. Calcule o intervalo de convergência da série $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, onde $a_{2n} = 1$ e $a_{2n+1} = 2$. Encontre também uma fórmula explícita para f.

9. Escreva uma série de potências para $\int_0^x f(t)\,dt$ e encontre seu raio de convergência.
$a) f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!}$ $\quad b) f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}.$

10. Usando o **Teorema de diferenciação termo a termo** prove que a função $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ é uma solução da equação diferencial $f''(x) + f(x) = 0$.

11. Seja $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$. Encontre os intervalos de convergência para f, f' e f''.

12. Represente em série de potências a função $f(x) = \ln(x+1)$, $x \in (-1, 1)$.

13. Represente em séries de potências a função $f(x) = x^2 e^{-x}$. Derivando termo a termo a série obtida, calcule a soma $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}(n+2)}{n!}$. (Resp: 0).

14. Se $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (t+3)^{2n}}{(2n)!}$, represente $\int_{-3}^{x} f(t)\, dt$ como uma série de potências e encontre o raio de convergência.

15. Represente as funções abaixo como soma de uma série de potências e determine o intervalo de convergência:
$a)\frac{1}{x-7}$, $\quad b)\frac{x}{4+x^2}$, $\quad c)\frac{2}{x^2-4x+3}$, $\quad d)\frac{1}{(1-x)^2}$, $\quad e)\frac{x^3}{(1-x^4)^2}$, $\quad f)\frac{1}{1+9x^2}$
$g)\frac{x}{1-x}$ $\quad h)(1-x^2)\mathrm{arctg}(x)$ $\quad i)\frac{1-x^2}{1+x^2}$ $\quad l)\frac{x}{1-x^3}$, $\quad m)x^2\ln(1+2x)$, $\quad n)\frac{\cos(x)-1}{x^2}$,
$o)(1+x^2)\cos(x)$, $\quad p)\mathrm{arctg}(x^2)$.

16. Calcule $f^{(3)}(0)$ para os pontos e,f,h,i,m,o,p do exercício anterior.

17. Mostre que $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ para $|x| < 1$. Calcule com esta série $\ln(3)$ até o terceiro decimal. Para obter a expressão acima pode integrar termo a termo a função $\frac{1}{1-t^2}$.

18. Use séries de potências para calcular as seguintes integrais
$a)\int_0^{1/2} \frac{1}{1+t^4}\, dt$ $\quad b)\int_0^1 \mathrm{arctg}(t^2)\, dt$ $\quad c)\int_0^1 t^2\mathrm{arctg}(t^4)\, dt$ $\quad d)\int_0^{1/2} \ln\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)\, dt.$

19. Calcule, até o terceiro decimal, as expressões abaixo:
$a)\int_0^{1/2} e^{-t^3}\, dt$ $\quad b)\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\, dt$ $\quad c)\int_0^1 \cos(\sqrt{t})\, dt$

20. Encontre o domínio da função (de Bessel) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$ e verifique que ela satisfaz a equação $x^2 f''(x) + x f'(x) + x^2 f(x) = 0$.

21. Use séries de potências para resolver os seguintes problemas de Cauchy. (Calcule também o raio de convergência da série).
$a)\ y'' + xy = 0,\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1,$ $\qquad b)\ y'' - xy' - y = 0,\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

22. Calcule a série de Taylor de centro $p = 0$ e o intervalo de convergência das seguintes funções (quando puder, use séries conhecidas):
a) $\sin(x)$, b) $\cos(x)$, c) e^x, d) e^{-x}, e) $\ln(1+x)$, f) $\sin(x)\cos(2x)$, g) $\cos^2(x)$.

23. Calcule a série de Taylor de centro p e o intervalo de convergência, para as seguintes funções (quando puder, use séries conhecidas):
a) e^x, $p = 1$ b) $\sin(x)$, $p = \pi$ c) $\frac{1}{x}$, $p = 1$

24. Encontre $g^{(15)}(0)$ e $g^{(18)}(0)$ da função $g(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$.
Encontre $f^{(3)}(0)$ e $f^{(4)}(0)$ da função $f(x) = (1+x^2)\sin(x)$; escreva a série numérica que fornece $f^{(3)}(1)$ e $f^{(4)}(1)$.

25. Considere a função $f(x) = \begin{cases} e^{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} & x \neq 0\,, \\ 0 & x = 0 \end{cases}$:
a) Quantas vezes é derivável?
b) Esboce o gráfico.
c) Calcule sua série de Taylor de centro 0:
d) a série converge? converge a f?

26. Calcule o valor de $\ln(1,2)$ com quatro casas decimais de precisão expandindo $f(x) = \ln(1+x)$ em série de Taylor em torno de $a = 0$.

27. Verifique a analiticidade das funções a seguir, usando o teorema estudado:
a) $\sin(x)$, b) e^x, c) $\ln(x)$ em 1, d) x^2 , d) $\mathrm{arctg}(x)$ em 0.