4^a Lista de Exercícios de SMA356 - Cálculo 4

Eugenio Massa

Sequências e séries de funções

1. Determine o conjunto de convergência pontual e a função limite pontual das seguintes sequências de funções.
   a) $f_n(x) = e^{nx}$, *b)* $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx^2}$, *c)* $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$, , *d)* $f_n(x) = \arctan(x+n)$,
   e) $f_n(x) = e^{-nx^2}$, *f)* $f_n(x) = \sum_{j=1}^n x^j$, *g)* $f_n(x) = x^n$, *h)* $f_n(x) = \frac{1}{nx^2}$
   i) $f_n(x) = \sin(nx)$, *j)* $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$, *k)* $f_n(x) = \frac{\sin(n^2 x)}{n}$
   l) $f_n(x) = \frac{x}{n}$, *m)* $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n+x}$, *n)* $f_n(x) = nx$, *o)* $f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n^2} + x^2}$.
   p) $f_n(x) = \begin{cases} n(1-n|x|) & |x| \leq 1/n \\ 0 & |x| > 1/n \end{cases}$ *q)* $f_n(x) = \begin{cases} 1-n|x| & |x| \leq 1/n \\ 0 & |x| > 1/n \end{cases}$ *r)* $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \geq 1/n \\ n & x < 1/n \end{cases}$

2. Verifique se as sequências do exercício anterior convergem uniformemente no seu conjunto de convergência pontual. Em caso contrário encontre um oportuno conjunto onde tenha-se convergência uniforme.

Nos exercícios abaixo, se ajude com algum programa para visualizar os gráficos, mas procure justificar tudo analiticamente.

3. Para cada $n \geq 1$, seja $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^4}$. Considere a função dada por
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$
   a) Esboce os gráficos de f e de f_n.
   b) f_n converge uniformemente a f em $[0,1]$? Justifique.
   c) Verifique que
$$\int_0^1 (\lim_{n\to\infty} f_n(x))\, dx \neq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx.$$

4. Verifique que a sequência $f_n(x) = \frac{1}{1+(x-n)^2}$ converge pontualmente mas não uniformemente em $\mathbb{R}$. Mostre que a convergência é uniforme em oportunas semi-retas.

5. Seja $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} nxe^{-nx^2}$.
   a) Calcule $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$ e $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 nxe^{-nx^2}\, dx$
   b) Mostre que a seqüência f_n, onde $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$, não converge uniformemente a f em $[0,1]$.

6. Mostre que $f_n(x) = \frac{\sin(n^\alpha x)}{n^2}$ converge uniformemente a zero em $\mathbb{R}$. Calcule para quais $\alpha \in \mathbb{R}$ as sequências f_n' e f_n'' também convergem uniformemente a zero.

7. Seja $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{x+n}$ e $a > 0$. Mostre que
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^a f_n(x)\, dx = 0$$

Séries de funções

8. Verifique se a série dada converge uniformemente no intervalo dado:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ em $[-r, r],\ r > 0.$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{2k+1}$ em $[-r, r],\ 0 < r < 1.$

9. Justifique a afirmação que as funções dadas são contínuas no conjunto B:

a) $s(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{x^2 + k^2}, \quad B = \mathbb{R}$ b) $s(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx^3}{k^4}, \quad B = \mathbb{R}$

c) $s(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{kx}}, \quad B = [1, \infty)$ d) $s(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{2k+1}, \quad B = [-r, r],\ r \in (0, 1)$

e) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!}, \quad B = \mathbb{R}$ f) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}. \quad B = \mathbb{R}$

10. Seja $s = s(x)$ dada por $s(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)x^k$.

a) Prove que para todo $t \in (-1, 1)$

$$\int_0^t s(x)\, dx = \frac{t^2}{1-t}.$$

b) Conclua que, para todo $x \in (-1, 1)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)x^k = \frac{2x - x^2}{(1-x)^2}.$$

11. Seja $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Verifique que $\displaystyle\int_0^x f(t)\, dt = f(x) - 1$.

12. Seja $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}$. Justifique a igualdade: $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$.

13. Seja $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{x}{n^2}\right)$. Justifique a igualdade: $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$.

Os exercícios abaixo são facultatívos (não cai na prova!).

14. Seja $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^x + 1}{n^2 e^x + n}$: calcule, se for possível, $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$. (Justificar!!!).
Mostre, através do teorema de troca do limite com a série, que a convergência não pode ser uniforme em nenhum conjunto da forma $(-\infty, H]$.

15. Seja $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n\sqrt{n}}$: calcule, se for possível, sua primitiva e sua derivada. (Justificar!!!).

16. Seja $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\, e^{-x^2/n}$: mostre que a série converge uniformemente em qualquer conjunto limitado e calcule, se for possível, sua derivada. (Justificar!!!).