1ª Lista de Exercícios de SMA356 - Cálculo 4

Eugenio Massa

Sequências numéricas

1. Mostre (por indução) as seguintes afirmações:
   a) $\sum_{n=1}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2}$ b) $\sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$ c) $\sum_{n=1}^{N} n^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4} = \left(\sum_{n=1}^{N} n\right)^2$
   d) $n! \geq 2^{n-1}$ e) se $x > -1$ então $(1+x)^n \geq 1 + nx$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

   f) $n^3 + 2n$ é divisível por 3.

   g) se n é ímpar então $n^3 - n$ é divisível por 24 (cuidado... o passo de indução será $P(n) \Rightarrow P(n+2)$)

2. a) Considere a sequência definida por $a_n = (a_{n-1})^2$, sendo $a_1 = 2$. Mostre por indução que $a_n = 2^{2^{n-1}}$.

   b) Considere a sequência definida por $a_n = (n-1)a_{n-1}$, sendo $a_1 = 1$. Mostre por indução que $a_n = (n-1)!$ (fatorial).

   c) Considere a sequência definida por $a_n = 2a_{n-1} + 1$, sendo $a_1 = 1$. Mostre por indução que $a_n = 2^n - 1$.

3. Calcule sup e inf e encontre todos os pontos de acumulação dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ abaixo:

   a) Conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$;
   b) conjunto $X = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.
   c) conjuntos $[0,1) \cup \{3\}$ e $[0,1) \cup \{-3\}$

   Calcule ainda

   $$\inf_{x\in\mathbb{N}} (x^3 - x); \qquad \sup_{x\in\mathbb{N}} (-x^2 - 3x); \qquad \inf_{x\in\mathbb{R}} \sin(x); \qquad \textbf{(!)} \inf_{x\in\mathbb{N}} \sin(x).$$

4. (Revisão de cálculo 1) Determine se cada sequência converge, diverge ou é oscilante. Se convergir, calcule seu limite.

   a) $\left\{-\frac{\ln(n^2)}{n}\right\}$ *b)* $\left\{\sin n \left(\ln n - \frac{1}{2}\ln(n^2+1)\right)\right\}$ *c)* $\left\{(1+3n)^{\frac{1}{n}}\right\}$

   d) $\left\{\ln\left(1 - \frac{7}{n}\right)^n\right\}$ *e)* $\left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+2} - n}\right\}$ *f)* $\left\{\left(\frac{3}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\right\}$

   g) $\left\{\frac{n}{3^n}\right\}$ *h)* $\left\{\frac{e^n + e^{-n}}{e^n - e^{-n}}\right\}$ *i)* $\{n\,[2 - \sin(n^2+1)]\}$

   l) $\left\{\frac{(-1)^n \cos n}{4^n}\right\}$ *m)* $\left\{\frac{(-1)^n n^2}{n^3 - 3}\right\}$ *n)* $\left\{\frac{3 + \sin n}{n}\right\}$

   o) $\left\{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1\right\}$ *p)* $\left\{6\left(-\frac{5}{6}\right)^n\right\}$ *q)* $\{[\cos(n+1)]^2 - n^2\}$

   r) $\left\{\frac{1}{n}\sin(n)\right\}$ *s)* $\left\{n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$ *t)* $\left\{\int_1^n \frac{1}{x^\alpha}\right\}$: $\alpha > 0$

5. Determine se cada sequência converge, diverge ou é oscilante. Se convergir, calcule seu limite.

   a) $\left\{\frac{3^n}{n!}\right\}$ *b)* $\left\{\sqrt[n]{n}\right\}$ *c)* $\left\{\frac{3^n}{n^n}\right\}$ *d)* $\left\{\frac{n!}{n^n}\right\}$

6. **(!)** Calcule os limites a seguir, usando as propriedades ou os teoremas conhecidos e justificando cada passagem.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{4n^2+n}-2n$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[2-\sin(n^2+1)\right]$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(1-\cos\left(1/n\right)\right)$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[4-e^{-\cos(n))}\right]$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \sin\left(\dfrac{n^2+1}{n^4+2}\right)$ f) $\lim\limits_{n\to\infty} n\,\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

7. Mostre que, se $0<c<d$, então a sequência

$$a_n=(c^n+d^n)^{1/n}$$

é limitada. Em seguida mostre que ela converge a d (sugestão: use o confronto).

8. Sejam $\{a_n\},\{b_n\}$ sequências tais que $|a_n-b_n|\leq\frac{1}{n}$: mostre que se $a_n\to a$ então $b_n\to a$.

9. Prove que:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n}+\ldots+\dfrac{n}{n}\right)=+\infty$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\ldots+\dfrac{n}{n^2}\right)=\dfrac{1}{2}$

10. Prove que se a sequência $\{a_n\}$ é limitada e $\lim_{n\to+\infty} b_n=0$ então $\lim_{n\to+\infty}(a_nb_n)=\ 0$.

11. Determine se a sequência abaixo é crescente, decrescente ou não monótona e também se ela é limitada superiormente ou inferiormente. Indique, justificando, se a sequência é convergente ou divergente.

a) $\left\{\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ *b)* $\{(-1)^{2n}\}_{n=0}^{\infty}$ *c)* $\left\{\dfrac{n^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$

d) $\left\{\dfrac{3^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *e)* $\{\sin(\pi n)\}_{n=0}^{\infty}$ *f)* $\left\{\dfrac{2n-1}{3n+1}\right\}_{n=0}^{\infty}$

12. Calcule os primeiros 3 termos de cada sequência e também o 5°:

a) $\left\{a_n=\frac{n}{2^n+1}\right\}_{n=0}^{\infty}$ b) $\{(-1)^{n^2}n\}_{n=1}^{\infty}$ c) $\{2+\cos(n\,\pi)\}_{n=0}^{\infty}$

d) $a_1=1,\qquad a_{n+1}=\frac{2}{a_n-2},\quad \forall n\geq 2$

13. Encontre uma possível expressão do termo geral (n-ésimo termo) de cada sequência.

a) $0,2,0,2,0,2\ldots$ b) $0,4,16,36,64,100,\ldots$ c) $1,-\frac{2}{3},\frac{4}{9},-\frac{8}{27},\ldots$ d) $1,2,6,24,120,\ldots$

14. Encontre os seis primeiros termos da sequência e, depois, encontre o n-ésimo termo.

a) $a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}a_n$ b) $a_1=1,\ a_2=3;\ a_{n+1}=2a_n-a_{n-1},\ n\geq 2$

15. Use o método de iteração para obter a solução explicita das recorrências definidas por

a) $a_n=2a_{n-1}+1$, sendo $a_1=3$.

b) $a_n=-3a_{n-1}+1$, sendo $a_1=1$.

16. Dada a sequência:

$$\{\sqrt{2},\sqrt{2\sqrt{2}},\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}},\ldots}\}$$

diga se é crescente, decrescente ou não monótona, se é limitada, e calcule o seu limite (sugestão: pode tentar escrever na forma $a_{n+1}=f(a_n)$).

17. Mostre que a sequência definida recursivamente por:

$$a_1=1,\qquad a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$$

satisfaz $0<a_n<2$ e é crescente. Podemos concluir que ela converge? Se sim, justifique e calcule o seu limite.

18. Mostre que a sequência definida recursivamente por $a_1 = 2$ e $a_{n+1} = \frac{1}{3-a_n}$ é decrescente e satisfaz $0 < a_n \leq 2,\ \forall n \geq 1$. Deduza que $\{a_n\}$ converge e encontre seu limite.

19. Diga se a sequência de termo geral $a_n = \displaystyle\int_{-n}^{0} e^{2x}\, dx$ é convergente para $n \to \infty$.

20. Para as sequências abaixo, construa as sequências $\overline{a_n} := \sup_{k\geq n} a_k$ e $\underline{a_n} := \inf_{k\geq n} a_k$ e use elas para calcular limite inferior e limite superior:
    $a_n = \frac{1}{n}$ $\quad$ $a_n = (-1)^n$ $\quad$ $a_n = n$ $\quad$ $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ $\quad$ $a_n = n + n(-1)^n$

21. Calcule limite inferior e limite superior das sequências abaixo.
    a) $(-1)^n + \frac{(-1)^n}{n}$ $\quad$ b) $((-1)^n + 1)\frac{n+1}{n}$ $\quad$ c) $n^{(-1)^n}$ $\quad$ d) $\sin(n)$ $\quad$ e) $\frac{1}{n}\sin(n)$

22. (Precisam integrais múltiplas.) Calcule
    a) $\lim_{n\to\infty} \iint_{A_n} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ onde $A_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \frac{1}{n^2} \leq x^2 + y^2 \leq 1\right\}$
    b) $\lim_{n\to\infty} \iint_{A_n} \frac{1}{(x^2+y^2)^2}$ onde $A_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq n^2\right\}$

23. Considere a sequência $a_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$.

    Mostre que, para $k \in \mathbb{N}$, vale $\displaystyle\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq \frac{1}{2}$.

    Conclua que a_n diverge.