1 Funções de várias variáveis a valores vetoriais

Uma **Funções de várias variáveis a valores vetoriais** é uma função

$$f : D \to \mathbb{R}^k : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

onde $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

Podemos interpretar de diferentes maneiras: por exemplo

- **Transformações**: o conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ é transformado no novo conjunto $\mathbf{f}(D) \subseteq \mathbb{R}^k$.
- **Mudança de variáveis**: (se $n = k$ e $\mathbf{f}$ é bijetora) o ponto $\mathbf{x}$ de coordenadas $(x_1, .., x_n)$ é representado pelo ponto $\mathbf{y}$ de coordenadas $(y_1, .., y_n)$ onde $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$.
- **Campos vetoriais**: a cada ponto $\mathbf{x} \in D$ a função associa um vetor $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^k$. (**link desenho C.V.**)

Valem as mesmas definições do caso de funções reais (domínio, domínio natural, contradomínio, imagem, sobrejetora, injetora, bijetora, operações, composição, inversa, gráfico...) veja **material SMA353: Funções aqui**

Como é feito para funções reais a valores vetoriais, podemos considerar as funções componentes

$$f_i : D \mapsto \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto f_i(\mathbf{x}) \quad (i = 1, .., k)$$

tais que

$$f : D \to \mathbb{R}^k : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\ f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), .., f_k(\mathbf{x})\ )$$

e aplicar a elas a teoria das funções a valores reais: limites, continuidade, diferenciabilidade, regras de cálculo, ecc. veja **material SMA354: funções de várias variaveis 1,2,3 aqui**

Em particular dizemos que **f é contínua (derivável/diferenciável)** em $\mathbf{x} \in D$ se cada sua compoente é.

Definição: dada $f : D \to C$ e $A \subseteq D$, dizemos que $\boxed{\boldsymbol{f \text{ é de Classe } \mathcal{C}^k \text{ em } A}}$ (Not: $f \in \mathcal{C}^k(A)$) se f e todas suas derivadas até a ordem k existem e são contínuas em A.

Lembrete: se f é de classe $\mathcal{C}^1$ em um aberto A então é diferenciável em A.

Definição: Se $\mathbf{f}$ é derivável em $\mathbf{p} \in D$ definimos a **Matriz Jacobiana de f em p:** a matriz $k \times n$

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & .. & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & .. & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & .. & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \frac{\partial f_k}{\partial x_2} & .. & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{p})\right] : \begin{array}{l} i = 1, .., k, \\ j = 1, .., n \end{array}$$

Observe:

- As colunas de J são as derivadas parciais (vetoriais) de $\mathbf{f}$: $\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{p}) : \; j = 1, .., n$
- as linhas de J são os gradientes das componentes de $\mathbf{f}$: $\nabla f_i(\mathbf{p}) : \; i = 1, .., k$

Regra da cadeia para funções a valores vetoriais

Sejam $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $\mathbf{g} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^t$ diferenciáveis,
então faz sentido $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^t : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ e vale

$$J_{\mathbf{g}\circ\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = J_{\mathbf{g}}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \cdot J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$$

1.1 Outros operadores de derivação

Para campos vetoriais ($F : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$), denotamos

$$F(\mathbf{x}) = (\, F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), .., F_n(\mathbf{x})\,), \qquad \mathbf{x} = (x_1, x_2, .., x_n)$$

podemos definir:
o **divergente** do campo:

$$divF(\mathbf{x}) := \sum_{1=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(\mathbf{x})$$

(outras notações: $divF = \nabla \cdot F$).

Para campos vetoriais ($F : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$) com $n = 3$, denotamos

$$F(\mathbf{x}) = (\, F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), F_3(\mathbf{x})\,), \qquad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$$

podemos definir
o **rotacional** do campo:

$$rotF := \begin{vmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

(outras notações: $rotF = \nabla \wedge F$).
(se $n = 2$ podemos definir $rotF = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}$)

Lembrete: Produto vetorial: No caso $n = 3$ (e $n = 2$) definimos o produto vetorial de dois vetores:

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \begin{vmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

Onde usa isso? Eq. de Maxwell

2 Exemplos importantes de transformações

2.1 Coordenadas polares no plano

Transformação

$$T : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : (\rho, \theta) \mapsto (\ \rho \cos(\theta),\ \ \rho \sin(\theta)\ ) \ :$$

Representamos o ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ como

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta)\,. \end{cases}$$

A matriz Jacobiana é

$$J_T(\rho, \theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\rho \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$det(J_T(\rho, \theta)) = \rho$$

Cálculo de ρ e θ:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\theta = 2k\pi + \begin{cases} arctg(y/x) & para\ x > 0 \\ arctg(y/x) + \pi & para\ x < 0 \\ \pi/2 & para\ x = 0,\ y > 0 \\ 3\pi/2 & para\ x = 0,\ y < 0 \\ q.q. & para\ x = 0,\ y = 0 \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z})\,.$$

2.2 Coordenadas cilíndricas

Transformação

$$T : [0, \infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (\rho, \theta, \tau) \mapsto (\ \rho\cos(\theta),\ \ \rho\sin(\theta),\ \ \tau\ ) \ \ :$$

Representamos o ponto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ como

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \\ z = \tau \end{cases}$$

A matriz Jacobiana é

$$J_T(\rho, \theta, \tau) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\rho\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \rho\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$det(J_T(\rho, \theta, \tau)) = \rho$$

Cálculo de ρ, θ e τ:

$$\tau = z,$$

ρ e θ como antes.

2.3 Coordenadas polares no espaço (esféricas)

Transformação (**veja aqui**)

$T : [0, \infty)\times\mathbb{R}\times[0, \pi] \to \mathbb{R}^3 : (\rho, \theta, \varphi) \mapsto (\ \rho\cos(\theta)\sin(\varphi),\ \rho\sin(\theta)\sin(\varphi),\ \rho\cos(\varphi)\ )\ :$

Representamos o ponto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ como

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ y = \rho\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z = \rho\cos(\varphi) \end{cases}$$

A matriz Jacobiana é

$$J_T(\rho, \theta, \varphi) = \begin{bmatrix} \cos(\theta)\sin(\varphi) & -\rho\sin(\theta)\sin(\varphi) & \rho\cos(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) & \rho\cos(\theta)\sin(\varphi) & \rho\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \cos(\varphi) & 0 & -\rho\sin(\varphi) \end{bmatrix}$$

$$det(J_T(\rho, \theta, \varphi)) = -\rho^2\sin(\varphi)$$

Cálculo de ρ, θ e φ:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

θ como antes,

$$\varphi = arccos\left(z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right).$$