1 Superfícies

Definição

Chamamos **Superfície parametrizada em $\mathbb{R}^n$**: uma função contínua $\sigma : B \to \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ onde $B \subseteq \mathbb{R}^2$.

- **Superfície**: a imagem de σ,
- **equação paramêtrica/vetorial da superfície**: a lei

Seja $\mathbf{p}_0 = (s_0, t_0) \in B'$: se σ é contínua com derivadas contínuas em $\mathbf{p}_0$ e $\sigma_s(\mathbf{p}_0), \sigma_s(\mathbf{p}_0) \neq 0$ então

- $\sigma_s(\mathbf{p}_0)$ é um **vetor tangente à superfície**, no ponto $\sigma(\mathbf{p}_0)$.
- $\sigma_t(\mathbf{p}_0)$ é um **vetor tangente à superfície**, no ponto $\sigma(\mathbf{p}_0)$.
- se $\sigma_s(\mathbf{p}_0), \sigma_t(\mathbf{p}_0)$ são linearmente independentes então definem um plano que passa pelo ponto $\sigma(\mathbf{p}_0)$:

$$\pi(q, r) = \sigma(s_0, t_0) + \sigma_s(s_0, t_0)q + \sigma_t(s_0, t_0)r$$

Dizemos que a superfície é **regular** se σ é contínua com derivadas contínuas, e as derivadas parciais σ_s, σ_t são linearmente independentes em cada ponto $(s, t) \in B$.
Neste caso o plano π é o **plano tangente à superfície**, no ponto $\sigma(\mathbf{p}_0)$.

Se $n = 3$, $\widehat{\mathbf{n}}(\mathbf{p}_0) = \frac{\sigma_s(\mathbf{p}_0) \wedge \sigma_t(\mathbf{p}_0)}{\|\sigma_s(\mathbf{p}_0) \wedge \sigma_t(\mathbf{p}_0)\|}$ é um **vetor unitário perpendicular à superfície**, no ponto $\sigma(\mathbf{p}_0)$.

2 Area de uma superfície e integral de superfície

Seja $\sigma : B \to \mathbb{R}^3$ uma superfície regular onde $B \subseteq \mathbb{R}^2$ é mensurável.

Então a **área da imagem de σ** é

$$A_\sigma = \int_B \|\sigma_s(s,t) \wedge \sigma_t(s,t)\| \; ds\, dt$$

Seja $f : A \to \mathbb{R}$ com $Im(\sigma) \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^3$ contínua, definimos a **integral de f sobre a superfície σ (integral de superfície)**

$$\int_\sigma f\, d\sigma := \int_B f(\sigma(s,t)) \; \|\sigma_s(s,t) \wedge \sigma_t(s,t)\| \; ds\, dt$$

Seja $F : A \to \mathbb{R}^3$ com $Im(\sigma) \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^3$ um campo contínuo, definimos o **fluxo de F através da superfície σ**, na direção da normal $\widehat{\mathbf{n}} = \frac{\sigma_s \wedge \sigma_t}{\|\sigma_s \wedge \sigma_t\|}$:

$$\int_\sigma [F \cdot \widehat{\mathbf{n}}]\, d\sigma = \int_B F(\sigma(s,t)) \cdot [\sigma_s(s,t) \wedge \sigma_t(s,t)]\, ds\, dt$$

(o fluxo na direção oposta será o oposto.)

Outras notações:

$\int_\sigma f\, d\sigma = \int_\sigma f\, dS = \iint_\sigma f\, dS = \ldots$

$\int_\sigma [F \cdot \widehat{\mathbf{n}}]\, d\sigma = \int_\sigma [F \cdot \widehat{\mathbf{n}}]\, dS = \int_\sigma F \cdot d\mathbf{S} = \int_\sigma F \cdot d\vec{\sigma} = \iint_\sigma F \cdot d\vec{\sigma}$

Observação. Dizemos que uma superfície é **regular por partes** se pode ser decomposta em um número finito de regulares. Neste caso podemos definir a integral somando cada parte

2.1 Alguns exemplos de superfícies

Gráfico de $f : A \to \mathbb{R}$ com $A \subseteq \mathbb{R}^2$:
$\sigma : A \to \mathbb{R}^3 : (x,y) \mapsto (x, y, f(x,y))$
$\sigma_x \wedge \sigma_y = (1, 0, f_x(x,y)) \wedge (0, 1, f_y(x,y)) = (-f_x(x,y), -f_y(x,y), 1)$
$\|\sigma_x \wedge \sigma_x\| = \sqrt{1 + [f_x(x,y)]^2 + [f_y(x,y)]^2}$

Esfera de raio R: worfram

$$\begin{aligned} \sigma \ &: \ [0,\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3 : \\ &(\varphi,\theta) \mapsto R(\, cos(\theta)sin(\varphi),\ sin(\theta)sin(\varphi),\ cos(\varphi)\,) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rlcccl} \sigma_\varphi = & R(& cos(\theta)cos(\varphi), & sin(\theta)cos(\varphi), & -sin(\varphi) &) \\ \sigma_\theta = & R(& -sin(\theta)sin(\varphi), & cos(\theta)sin(\varphi), & 0 &) \\ \sigma_\varphi \wedge \sigma_\theta = & R^2(& cos(\theta)sin^2(\varphi), & sin(\theta)sin^2(\varphi), & cos(\varphi)sin(\varphi) &) \end{array}$$

$$\|\sigma_\varphi \wedge \sigma_\theta\| = R^2 sin(\varphi)$$

Toro de raios $r < R$: worfram

$$\begin{aligned} \sigma \ &: \ [0,2\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3 \\ &(\varphi,\theta) \mapsto (\, cos(\theta)[R + rcos(\varphi)],\ sin(\theta)[R + rcos(\varphi)],\ rsin(\varphi)\,) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} \sigma_\varphi & = (\quad -cos(\theta)rsin(\varphi), \quad -sin(\theta)rsin(\varphi), \quad rcos(\varphi) \quad) \\ \sigma_\theta & = (\quad -sin(\theta)[R + rcos(\varphi)], \quad cos(\theta)[R + rcos(\varphi)], \quad 0 \quad) \end{array}$$

$$\sigma_\varphi \wedge \sigma_\theta = r[R + rcos(\varphi)](\, -cos(\theta)cos(\varphi),\ -sin(\theta)cos(\varphi),\ sin(\varphi)\,)$$

$$\|\sigma_\varphi \wedge \sigma_\theta\| = r[R + rcos(\varphi)]$$

---

fita torcida (orientável) / fita de Moebius (não orientável)

3 Stokes e Gauss no espaço

Teorema 3.1 (**Teorema de Stokes em $\mathbb{R}^3$**)**.** *Seja $\sigma : B \to \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada, regular e com também derivadas segundas contínuas, onde B é como no Teorema de Green.*
Seja $F : A \to \mathbb{R}^3$ com $Im(\sigma) \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^3$ um campo contínuo com derivadas contínuas.
Então

$$\iint_\sigma [rotF \cdot \widehat{\mathbf{n}}]\, d\sigma = \oint_{\partial^+\sigma} F \cdot d\mathbf{s}\,,$$

onde $\partial^+\sigma = \sigma(\partial B)$ orientada de forma que
"σ esteja sempre a esquerda de quem olha da ponta de $\widehat{\mathbf{n}}$ na direção de $\widehat{\mathbf{t}}$ "
(em particular, se $\widehat{\mathbf{n}} = \frac{\sigma_s \wedge \sigma_t}{\|\sigma_s \wedge \sigma_t\|}$ então $\partial^+\sigma = \sigma(\partial^+ B)$)
analogamente: o vetor $\mathbf{v} = \widehat{\mathbf{t}} \wedge \widehat{\mathbf{n}}$ aponta para fora da superfície.

Teorema 3.2 (**Teorema de Gauss em $\mathbb{R}^3$**)**.** *Seja $V \subseteq \mathbb{R}^3$ uma região limitada*.*
Seja $F : A \to \mathbb{R}^3$ com $\overline{V} \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^3$ um campo contínuo com derivadas contínuas.
Então

$$\iiint_V divF\, dV = \iint_{\partial V} [F \cdot \widehat{\mathbf{n}}_{ext}]\, d\sigma\,.$$

---

* Precisam algumas hipóteses complicadas. Suponhamos que V possa ser decomposta em um número finito de regiões que podem ser vistas na forma

$$V = \{x_1, x_2 \in C,\ f(x_1,x_2) \leq x_3 \leq g(x_1,x_2)\}$$

onde f, g são contínuas com derivadas contínuas e C é come no teorema de Green. Isso para qualquer (todas) ordem das variáveis!
Chamamos de **superfície fechada** a borda de uma região assim.

Usando os teorema de Stokes e de Gauss em $\mathbb{R}^3$ podemos obter a seguinte interpretação do significado do rotacional e do divergente de um campo tridimensional F:

$$[rotF(\mathbf{p})] \cdot \widehat{\mathbf{v}} = \lim_{r \to 0} \left(\frac{\displaystyle\oint_{\partial^+ D_r^{\widehat{\mathbf{v}}}(\mathbf{p})} F \cdot d\mathbf{s}}{|D_r^{\widehat{\mathbf{v}}}(\mathbf{p})|_2} \right)$$

onde $D_r^{\widehat{\mathbf{v}}}(\mathbf{p})$ é o disco de raio r, centro $\mathbf{p}$ e normal $\widehat{\mathbf{v}}$.

$$divF(\mathbf{p}) = \lim_{r \to 0} \left(\frac{\displaystyle\int_{\partial B_r(\mathbf{p})} [F \cdot \widehat{\mathbf{n}}_{ext}] \, d\sigma}{|B_r(\mathbf{p})|_3} \right)$$

onde $B_r(\mathbf{p})$ é a bola de raio r e centro $\mathbf{p}$.

4 Campos solenoidais

Seja $F : A \to \mathbb{R}^3$ ($A \subseteq \mathbb{R}^3$) um campo regular derivável com derivadas contínuas).

Lembrete:
F é **conservativo** se $F = \nabla\varphi$ para algum $\varphi : A \to \mathbb{R}$. Isso implica

- $\displaystyle\int_\gamma F \cdot d\vec{s}$ não depende do caminho (só dos extremos: $= \varphi(x_2) - \varphi(x_1)$)
- $\displaystyle\oint_\gamma F \cdot d\vec{s} = 0$ (em curvas fechadas)
- $rotF = 0$ (campo **irrotacional**)

viceversa,

- se $rotF = 0$ e A é simplesmente conexo então $F = \nabla\varphi$.
- se $rotF = 0$ mas A não é simplesmente conexo então F poderia não ser conservativo.

Suponha $F = rotG$ para algum $G : A \to \mathbb{R}^3$. Isso implica

(a). $\displaystyle\iint_\sigma F \cdot d\vec{S}$ não depende da superfície (só da borda: $= \int_{\partial^+\sigma} G \cdot d\vec{s}$)

(b). $\displaystyle\oint\!\!\!\oint_\sigma F \cdot d\vec{S} = 0$ (em superfícies fechadas)

(c). $divF = 0$ (campo **solenoidal**)

viceversa,

- se $divF = 0$ e A é fortemente conexo então valem (a) e (b) e $F = rotG$.
- se $divF = 0$ mas A não é fortemente conexo então (a) e (b) poderiam não valer e logo F não seria o rotacional de um campo.

Nesta situação G é dito **potencial-vetor** do campo solenoidal F.
Existem infinitos: $G + \nabla\psi$ também é.

Definição 4.1. Um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^3$ é dito **fortemente conexo** se é conexo por caminhos e vale uma das seguintes condições equivalentes:

- toda superfície fechada contida em A pode ser deformada a um ponto sem sair de A,
- dadas duas superfícies contidas em A que tenham a mesma borda, uma pode ser deformada até a outra sem sair de A,
- toda superfície fechada contida em A é a borda de uma região contida em A.

Exemplo 4.2.

- São fortemente conexos: $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^3$ menos uma reta, $\mathbb{R}^3$ menos um plano, paralelepípedos, ..
- Não são fortemente conexos: $\mathbb{R}^3$ menos um ponto.

5 Eq. de Maxwell

Eq. de Maxwell

Lei de Gauss (para o campo elétrico)

$$divE = \rho/\varepsilon_0$$

(ρ densidade de carga (escalar)). Integrando:

$$\iint_{\partial V} E \cdot d\vec{S} = Q_V/\varepsilon_0$$

"O fluxo elétrico através de uma superfície fechada é igual* à carga total na região interior".

No vácuo, o fluxo elétrico através de uma superfície

$$\iint_{\sigma} E \cdot d\vec{S}$$

depende apenas da $\partial^+\sigma$

Lei de Gauss para o campo magnético

$$divB = 0$$

Integrando

$$\iint_{\partial V} B \cdot d\vec{S} = 0$$

"O fluxo magnético através de uma superfície fechada é sempre igual a zero".

O fluxo magnético através de uma superfície

$$\iint_{\sigma} B \cdot d\vec{S}$$

depende apenas da $\partial^+\sigma$.

O campo B admite um potencial-vetor (em conjuntos fortemente conexos)

Lei de Ampere (caso estático - sem correção de Maxwell)

$$rot B = \mu_0 \vec{j}$$

($\vec{j}$ densidade de corrente (Campo Vetorial)). Integrando

$$\int_{\partial^+\sigma} B \cdot d\vec{s} = \mu_0 \iint_\sigma \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 J_\sigma$$

"A circuitação de B ao longo da curva fechada $\partial^+\sigma$ é igual* ao fluxo de corrente por σ".

Lei de Ampere (caso geral - com correção de Maxwell)

$$rot B = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 E_t$$

$$\int_{\partial^+\sigma} B \cdot d\vec{s} = \mu_0 \iint_\sigma \vec{j} \cdot d\vec{S} + \mu_0 \varepsilon_0 \, \partial_t \iint_\sigma E \cdot d\vec{S} = \mu_0 J_\sigma + \mu_0 \varepsilon_0 \, \partial_t \Phi_\sigma(E)$$

"A circuitação de B ao longo da curva fechada $\partial^+\sigma$ é igual* ao fluxo de corrente por σ mais a derivada temporal do fluxo de E por σ".

Lei de Faraday (indução eletromagnética)

$$rot E = -B_t$$

$$\int_{\partial^+\sigma} E \cdot d\vec{s} = -\partial_t \iint_\sigma B \cdot d\vec{S} = -\partial_t \Phi_\sigma(B)$$

A circuitação de E ao longo da curva fechada $\partial^+\sigma$ é igual* ao oposto da derivada do fluxo de B por σ

"A força eletromotriz induzida em qualquer circuito fechado é igual ao oposto da variação do fluxo magnético com o tempo na área delimitada pelo circuito"

---

* a igualdade é sempre através de alguma constante de proporcionalidade.