1 Lembrete: curvas

Definição

Chamamos **Curva em $\mathbb{R}^n$**: uma função contínua $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ onde $I \subseteq \mathbb{R}$ é intervalo. (link desenho curvas)

Definimos:

- **Traço da curva**: a imagem
- **equação paramêtrica/vetorial da curva**: a lei $\gamma(t) = \ldots$
- Dizemos que a curva é **simples** se γ é injetora.
- Dizemos que a curva é **fechada** se $I = [a, b]$ e $\gamma(a) = \gamma(b)$.
- Dizemos que a curva é **fechada simples** se fechada e $\gamma|_{[a,b)}$ injetora.
- Dizemos que a curva é *derivável* se γ é derivável

Seja $p \in I$: se γ é derivável em p e $\gamma'(p) \neq 0$ então

- $\gamma'(p)$ é um **vetor tangente ao traço**, no ponto $\gamma(p)$
- $\widehat{\mathbf{t}}(p) = \gamma'(p)/\left\|\gamma'(p)\right\|$ é um **vetor unitário tangente ao traço**, no ponto $\gamma(p)$.
- assim, o traço da curva(reta) $\mathbf{r}(t) = \gamma(p) + \widehat{\mathbf{t}}(p)t$ é uma **reta tangente ao traço de γ** no ponto $\gamma(p)$.
- Dizemos que a curva é **regular** se γ é derivável e $\gamma' \neq 0$ em todo I: logo o traço possui reta tangente em todo ponto.

- *Interpretação cinemática*: $\gamma(t)$ pode representar o movimento de um corpo em $\mathbb{R}^n$: t representa o tempo e γ a posição. neste caso γ' é a velocidade vetorial, γ'' é a aceleração vetorial.
- Dizemos que a curva é **parametrizada pelo comprimento de arco** quando $\|\gamma'\| = 1$ em todo ponto (traço percorrido com velocide 1).

2 Integráis de linha

2.1 Integral de linha com respeito ao comprimento de arco

Sejam

- $f : A \to \mathbb{R}$ uma **função** de domínio $A \subseteq \mathbb{R}^n$
- $\gamma : [a, b] \to A$ uma **curva regular e com derivada contínua**,

Queremos definir a **integral de f ao longo de γ** (integral de linha com respeito ao comprimento de arco)

$$\int_\gamma f\, ds := \int_a^b f(\gamma(t))\, \|\gamma'(t)\|\, dt$$

OBS: não depende da parametrização da curva (pelo menos se a reparametrização é bijetora).

OBS: se γ é parametrizada pelo comprimento de arco então $\int_\gamma f\, ds := \int_a^b f(\gamma(t))\, dt$

OBS: se γ é apenas regular por partes podemos somar em cada parte

---

Interpretação geométrica:

- $$\int_\gamma 1\, ds$$
  é o comprimento do traço de γ.
- se $n = 2$, $f \geq 0$,
  $$\int_\gamma f\, ds$$
  é a área da superfície vertical que está acima do traço de γ, entre o plano xy e o gráfico de f.

2.2 Integral de um campo vetorial ao longo de uma linha

Sejam

- $F : A \to \mathbb{R}^n$ um **campo vetorial** de domínio $A \subseteq \mathbb{R}^n$
- $\gamma : [a,b] \to A$ uma **curva regular e com derivada contínua**,

Queremos definir a **integral do campo F ao longo de γ**

$$\int_\gamma F \cdot d\mathbf{s} := \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

OBS: não depende da parametrização da curva exceto pelo sinal!!!

Outras fórmulas ou notações:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F \cdot d\mathbf{s} = \int_\gamma F \cdot d\mathbf{x} = \int_\gamma F \cdot d\gamma &= \int_\gamma \left[F \cdot \widehat{\mathbf{t}} \right] ds \\
&= \int_a^b \left[F(\gamma(t)) \cdot \widehat{\mathbf{t}}(t) \right] \|\gamma'(t)\|\, dt \\
&= \int_\gamma F_1(x_1, .., x_n) dx_1 + ... + F_n(x_1, .., x_n) dx_n \\
&= \int_a^b [\, F_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + ... + F_n(\gamma(t))\gamma_n'(t)\,]\, dt
\end{aligned}$$

Interpretação física:

- Se F é um campo de forças então

  $$\int_\gamma F \cdot d\mathbf{s}$$

  é o trabalho feito pelo campo F sobre uma particula que percorre o traço de γ .

2.3 Fluxo de um campo vetorial através de uma curva

Para o **caso** $n = 2$, sejam ainda

- $F : A \to \mathbb{R}^2$ um **campo vetorial** de domínio $A \subseteq \mathbb{R}^2$
- $\gamma : [a, b] \to A$ uma **curva regular e com derivada contínua**,

Queremos definir o **fluxo do campo F através da curva γ**

$$\int_\gamma [\, F \cdot \widehat{\mathbf{n}} \,]\, ds := \int_a^b [\, F(\gamma(t)) \cdot \widehat{\mathbf{n}}(t) \,]\, \|\gamma'(t)\|\, dt$$

OBS: não depende da parametrização da curva (pelo menos se a reparametrização é bijetora) mas depende da escolha do sentido de $\widehat{\mathbf{n}}$

Lembrete: em $\mathbb{R}^2$ vale $\widehat{\mathbf{n}} \perp \widehat{\mathbf{t}} \iff \widehat{\mathbf{n}} \cdot \widehat{\mathbf{t}} = 0$.
Se $\widehat{\mathbf{t}} = (a, b)$ então $\widehat{\mathbf{n}} = \pm(b, -a)$

Outras fórmulas ou notações:

$$\int_\gamma [\, F \cdot \widehat{\mathbf{n}} \,]\, ds =$$

$$= (\pm) \int_\gamma F_1(x, y)dy - F_2(x, y)dx$$

$$= (\pm) \int_a^b [\, F_1(\gamma(t))\gamma_2'(t) - F_2(\gamma(t))\gamma_1'(t) \,]\, dt$$

Interpretação física:

- Se F é a velocidade de um escoamento plano

$$\int_\gamma [\, F \cdot \widehat{\mathbf{n}} \,]\, ds$$

é o fluxo de fluido através do traço de γ ("área" de fluido por unidade de tempo).

3 Campos conservativos

Definição Dado um campo vetorial $F : A \to \mathbb{R}^n$ com $A \subseteq \mathbb{R}^n$ dizemos que **o trabalho de F não depende do caminho** se:

$$\text{dados } \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in A, \int_\gamma F \cdot d\mathbf{s} \text{ é o mesmo valor}$$

$$\text{para qualquer curva } \gamma \subseteq A \text{ que vai de } \mathbf{p}_1 \text{ a } \mathbf{p}_2.$$

Neste caso pode-se usar a notação $\int_\gamma F \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{p}_1}^{\mathbf{p}_2} F \cdot d\mathbf{s}$

Observação. Isso é equivalente a

$$\int_\gamma F \cdot d\mathbf{s} = 0 \text{ para toda curva } \gamma \subseteq A \text{ fechada} \quad \left(\oint_\gamma F \cdot d\mathbf{s} = 0 \right).$$

PROBLEMA verificar infinitos integrais de linha não é muito bom!

Teorema 3.1. *Seja $F : A \to \mathbb{R}^n$* **um campo contínuo***, com $A \subseteq \mathbb{R}^n$.*
se existir

$$\varphi : \mathbf{A} \to \mathbb{R} \quad \textit{tal que} \quad F = \nabla\varphi \textit{ em } A$$

então

$$\int_\gamma F \cdot d\mathbf{s} = \varphi(\mathbf{p}_2) - \varphi(\mathbf{p}_1)$$

para qualquer curva $\gamma \subseteq A$ que vai de $\mathbf{p}_1$ a $\mathbf{p}_2$ *(logo o trabalho de F não depende do caminho).*

Definição Seja $F : A \to \mathbb{R}^n$ um campo contínuo, com $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Dizemos que **F é conservativo se existir $\varphi : A \to \mathbb{R}$ como no teorema**.

A função φ é dita **potencial de F** (ou primitiva de F).

Observação. Se φ é potencial de F, então $\varphi + c$ também é, $\forall\, c \in \mathbb{R}$.

Observação. para $n = 1$, toda função contínua tem primitiva ($P_f(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$). Para $n > 1$ não!!! Então quando um campo é conservativo?

Teorema 3.2. *Seja $F : A \to \mathbb{R}^n$ um campo contínuo, com $A \subseteq \mathbb{R}^n$.*

- *Se o trabalho de F não depende do caminho* **então F é conservativo**.
- *Se A é um* **conjunto conexo por caminhos**, *uma escolha de φ é*

  $$\varphi(\mathbf{p}) = \int_{\mathbf{p_0}}^{\mathbf{p}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds}$$

  onde $\mathbf{p}_0 \in A$ é um ponto fixado.

  Além disso, se ψ é outro potencial então $\varphi - \psi = const.$

Resumindo: **para $F : A \to \mathbb{R}^n$ campo contínuo, com $A \subseteq \mathbb{R}^n$,**
o trabalho de F não depende do caminho se e só se F possui um potencial.

PROBLEMA ainda precisamos verificar infinitos integrais de linha para saber se é conservativo!!

Observação. Seja $F : A \to \mathbb{R}^n$ um campo contínuo e com derivadas contínuas, com $A \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto: **Se $F = \nabla\varphi$ então**

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad \textbf{para todo } i \neq j$$

(Teorema de Schwarz, veja **material SMA354: funções de várias variaveis 3 aqui**)

Definição Um campo $F : A \to \mathbb{R}^n$ contínuo e com derivadas contínuas, com $A \subseteq \mathbb{R}^n$, é dito **Irrotacional** quando tem todas as derivadas cruzadas iguais:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad \text{para todo } i \neq j$$

Resumindo: **para $F : A \to \mathbb{R}^n$ campo contínuo e com derivadas contínuas, com $A \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, ser irrotacional é cond. necessária para ser conservativo!**

Observação. Se $n = 2$ ou $n = 3$ a condição pode ser escrita como $rot(F) = 0$.

Porém a condição não é suficiente!!

Teorema 3.3. *Seja $F : Q \to \mathbb{R}^n$ um* **campo contínuo e com derivadas contínuas, com $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ um (multi-)retângulo (produto de intervalos),**
então F **é conservativo se e só se $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$ para todo $i \neq j$, em todo Q.**

Para a prova precisamos

Teorema 3.4. *Dada $f(x, y)$ contínua e com derivadas contínuas em $I \times [a, b]$, seja $F(x) := \int_a^b f(x, y)\, dy$.*
Então F é derivável em I e vale

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\, dy$$

O Teorema pode ser melhorado:

Definição 3.5. Um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é dito **simplesmente conexo** se é conexo por caminhos e vale uma das seguintes condições equivalentes:

- toda curva fechada contida em A pode ser deformada a um ponto sem sair de A,
- dadas duas curvas contidas em A que conectam dois pontos dados, uma pode ser deformada até a outra sem sair de A,
- toda curva fechada contida em A é a borda de uma superfície contida em A.

Exemplo 3.6.

- São simplesmente conexos: $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^3$ menos um ponto, $\mathbb{R}^2$ menos uma semirreta, $\mathbb{R}^3$ menos um semiplano ou uma semirreta,...
- Não são simplesmente conexos: $\mathbb{R}^2$ menos um ponto, $\mathbb{R}^3$ menos uma reta,

Teorema 3.7. *Seja $F : A \to \mathbb{R}^n$ um* **campo contínuo e com derivadas contínuas, com $A \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto simplesmente conexo.**

então F **é conservativo se e só se** $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$ **para todo** $i \neq j$**, em todo** Q.

3.1 Exemplos

O **campo eletrostático** (campo elétrico em condições estacionárias)

$$E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

satisfaz a eq. de Maxwell $rotE = 0$.
Logo é conservativo e admite um potencial $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $E = \nabla\phi$.
Logo

- o **trabalho feito por E sobre uma carga q que vai de $\mathbf{p}_1$ a $\mathbf{p}_2$** é

$$q \int_{\mathbf{p}_1}^{\mathbf{p}_2} E \cdot d\mathbf{s} = q\,[\phi(\mathbf{p}_2) - \phi(\mathbf{p}_1)]$$

- o **trabalho necessário para fazer a carga q ir de $\mathbf{p}_1$ a $\mathbf{p}_2$ contra o campo elétrico** é

$$-q \int_{\mathbf{p}_1}^{\mathbf{p}_2} E \cdot d\mathbf{s} = q\,[\phi(\mathbf{p}_1) - \phi(\mathbf{p}_2)]$$

CUIDADO: Em geral na fisica se usa a definição trocada de sinal: $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $E = -\nabla V$ (**Potencial eletrostático**). Dessa forma

$$q \int_{\mathbf{p}_1}^{\mathbf{p}_2} E \cdot d\mathbf{s} = q\,[V(\mathbf{p}_1) - V(\mathbf{p}_2)]$$

$U = qV$ é a **Energia eletrostática** da carga q no campo.

O **campo magnetostático** (campo magnético em condições estacionárias)

$$B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

satisfaz a eq. de Maxwell $rotB = \mu_0\mathbf{j}$, logo é irrotacional onde não há densidade de corrente.

Eq. de Maxwell

4 Teorema de Green

Dado um aberto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ consideremos um conjunto $B \subseteq A$ com as seguintes propriedades:

- B é compacto (fechado e limitado),
- $B' \neq \emptyset$,
- a fronteira de B é uma (ou mais) curva fechada regular por partes.

Seja $\partial^+ B$ a fronteira de B orientada de forma que
"B esteja sempre a esquerda de quem olha na direção de $\widehat{\mathbf{t}}$"
(analogamente, tal que $\widehat{\mathbf{t}} \wedge \widehat{k} = \widehat{\mathbf{n}}_{ext}$)

Teorema 4.1 (**Teorema de Green**). *Seja $A \subseteq \mathbb{R}^2$ um aberto e $B \subseteq A$ como acima.*
Sejam $P, Q : A \to \mathbb{R}$ contínuas com derivadas contínuas.
Então

$$\iint_B \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \oint_{\partial^+ B} P dx + Q dy$$

Reformulação 1) **Teorema de Stokes em $\mathbb{R}^2$**
Considerando $F = (P, Q)$

$$\iint_B rot\, F = \oint_{\partial^+ B} F \cdot d\mathbf{s}$$

Reformulação 2) **Teorema de Gauss em $\mathbb{R}^2$** (ou teor do divergente)
Considerando $G = (Q, -P)$

$$\iint_B div\, G = \oint_{\partial B} [G \cdot \widehat{\mathbf{n}}_{ext}]\, ds$$

Aplicação

$$\int_B 1\, dxdy = \oint_{\partial^+ B} x\, dy = \oint_{\partial^+ B} -y\, dx = \frac{1}{2} \oint_{\partial^+ B} x\, dy - y\, dx$$

Usando os teorema de Stokes e de Gauss podemos obter a seguinte interpretação do significado do rotacional e do divergente de um campo bidimensional F:

$$rotF(\mathbf{p}) = \lim_{r\to 0}\left(\frac{\oint_{\partial^+ C_r(\mathbf{p})} F\cdot d\mathbf{s}}{|B_r(\mathbf{p})|_2}\right)$$

$$divF(\mathbf{p}) = \lim_{r\to 0}\left(\frac{\oint_{\partial C_r(\mathbf{p})} \left[F\cdot \widehat{\mathbf{n}}_{ext}\right] ds}{|B_r(\mathbf{p})|_2}\right)$$

onde $B_r(\mathbf{p})$ é a bola de raio r e centro $\mathbf{p}$.