

6ª Lista de Exercícios de SMA-355 Cálculo 3

Eugenio Massa

Green, Gauss e Stokes em \mathbb{R}^2 .

1. Calcule a área da região limitada pela curva $x = t - \text{sent}$, $y = 1 - \text{cost}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, e pelo eixo Ox . **Resp.** 3π .
2. Calcule (primeiro usando o teorema de Green e depois usando integração dupla) a área da região limitada pela elipse $x = a \text{cost}$, $y = b \text{sent}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, onde $a > 0$ e $b > 0$. **Resp.** $ab\pi$
3. Usando o Teorema de Green, calcule a área da região limitada pela reta $y = x$ e pela curva $(x, y) = (t^3 + t, t^5 + t)$, com $0 \leq t \leq 1$. Desenhe a região. **Resp.:** $\frac{5}{24}$.
4. Calcule $\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\gamma$ e $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{n} ds$, onde γ é uma curva fechada, simples, C^1 por partes, orientada em sentido antihorário, cujo traço é a fronteira de um conjunto para o qual vale o teorema de Green, \vec{n} é a normal unitária externa e $\vec{F}(x, y) = (2x + y)\vec{i} + (3x - y)\vec{j}$.
5. Calcule $\oint \vec{F} \cdot d\gamma$ e $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{n} ds$, onde $\vec{F}(x, y) = 4x^3y^3\vec{i} + (3x^4y^2 + 5x)\vec{j}$ e γ a fronteira do quadrado de vértice $(-1, 0)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$ e \vec{n} é a normal unitária externa.
6. Verifique o teorema de Green para $\oint_{\gamma} [(2x^2 + y)dx + (3x^2 - y^2)dy]$, onde γ é a circunferência de centro na origem e raio 1.
7. Verifique o teorema de Green para $\oint_{\gamma} [(4x^3 + y^2)dx + (5x - y)dy]$, onde γ é a elipse dada por $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.
8. Verifique o teorema de Stokes para $\vec{F}(x, y) = (x^2 + 3y^2)\vec{i} + (5x - y^2)\vec{j}$, onde γ é a fronteira da região $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.
9. Comprovar o Teorema de Green nos casos abaixo, isto é, verifique que

$$\oint_{\partial C} Pdx + Qdy = \iint_C \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

- (a) $\oint_{\gamma} (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy$ sendo C o domínio limitado entre $y = x^2$ e $y = x$.
- (b) $\vec{F} = xy\vec{i} - 2xy\vec{j}$, C é o retângulo $1 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 3$.
- (c) $\vec{F} = (\frac{2}{3} - x^2y)\vec{i} + x^2y^2\vec{j}$, C é o triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$.
10. Usando o Teorema de Green, calcular:
 - (a) $\oint_{\gamma} e^x \sin y dx + e^x \cos y dy$ sobre o retângulo de vértices: $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, \pi/2)$ e $(0, \pi/2)$
 - (b) $\oint_{\gamma} 2x^2y^3 dx + 3xy dy$ em que γ é o círculo $x^2 + y^2 = 1$.
11. Usando integral de linha, calcule a área da região delimitada pelas curvas $y = x + 2$ e $y = x^2$.
12. Usando integral de linha, calcule a área da região no primeiro quadrante delimitada pelas curvas $4y = x$, $y = 4x$ e $xy = 4$.
13. Calcule $\oint_C \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$ e $\oint_C \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$, em que C é o arco de parábola $y = x^2 - 1$, $-1 \leq x \leq 2$, seguido pelo segmento de $(2,3)$ a $(-1,0)$. (Aplicar o Teorema de Stokes no plano a uma região que não contenha a origem!!!).

14. Calcule $\int_C \frac{(x, y)}{x^2 + y^2} \cdot \vec{n} ds$ e $\int_C \frac{(y, -x)}{x^2 + y^2} \cdot \vec{n} ds$ (onde \vec{n} é a normal unitária externa) para a curva do exercício anterior. (Aplicar o Teorema da divergência no plano a uma região que não contenha a origem!!!).
15. Seja $\vec{F}(x, y) = x^3 y^3 \vec{i} + \left(3y - \frac{3}{4} x^2 y^4\right) \vec{j}$ e seja $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Calcule $\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{n} ds$, onde \vec{n} é a normal com componente $y \geq 0$. **Dica:** Escolha um conjunto conveniente e aplique o Teorema da Divergência no Plano. **Resp.:** $\frac{3\pi}{4}$.

GABARITO

Exercício 4 2α e $e \alpha$, onde α é a área do conjunto.