4^{a} Lista de Exercícios de SMA-355 Cálculo 3

Eugenio Massa

Integrais de linha.

1. Calcule
   (a) $\int_\gamma (x^2+y^2)ds$, em que $\gamma(t)=(t,t)$, $-1\le t\le 1$.
   (b) $\int_\gamma (2xy+y^2)ds$, em que $\gamma(t)=(t+1,t-1)$, $0\le t\le 1$.
   (c) $\int_\gamma xyzds$, em que $\gamma(t)=(\cos\ t,\sin\ t,t)$, $0\le t\le 2\pi$.
   (d) $\int_\gamma (x+y+z)ds$, em que $\gamma(t)=(t,2t,3t)$, $0\le t\le 1$.
   (e) $\int_\gamma xy\,ds$ e $\int_\gamma |xy|\,ds$, em que $\gamma(t)=(t,t^2)$, $-1\le t\le 1$. **Resp.** 0, 9
   (f) $\int_\gamma (x^2+y^2)ds$, em que γ é a curva dada, em coordenadas polares, pela eq. $\rho=e^t$, $0\le t\le 4\pi$ **Resp.** $\frac{\sqrt{2}}{3}(e^{12\pi}-1)$.

2. Calcule $\int_\gamma \vec{F}\cdot\widehat{\mathbf{t}}\,ds$, em que $\widehat{\mathbf{t}}$ é o vetor unitário tangente à curva γ, nos seguintes casos:
   (a) $\vec{F}=xy\vec{i}-y\vec{j}+\vec{k}$, C é o segmento de reta de (0,0,0) a (1,1,1). **Resp.** 5/6
   (b) $\vec{F}=x\vec{i}-y\vec{j}+z\vec{k}$, C é dada por $x=\cos\ \theta$, $y=\sin\ \theta$, $z=\frac{\theta}{\pi}$, $0\le\theta\le 2\pi$.
   (c) $\vec{F}=(y,x)$, γ é como no exercício 1 ao ponto (e). **Resp.** 2
   (d) $\vec{F}=(x-y,x+y)$, γ é como no exercício 1 ao ponto (f) **Resp.** $e^{8\pi}-1$.

3. Calcule $\int_\gamma \vec{F}\cdot\widehat{\mathbf{n}}\,ds$, em que $\widehat{\mathbf{n}}$ é o vetor unitário normal à curva γ tal que $\widehat{\mathbf{t}}\wedge\widehat{\mathbf{n}}=\vec{k}$, nos seguintes casos:
   (a) $\vec{F}=(y,x)$, γ é como no exercício 1 ao ponto (e).
   (b) $\vec{F}=(x+y,x^2)$, $\gamma(t)=(\cos(t),\sin(t)):\ t\in[0,2\pi]$.

4. Calcule $\int_\gamma x\ dx+y\ dy$, sendo γ dada por $x=t^2$ e $y=\sin\ t$, $0\le t\le\pi/2$.

5. Calcule $\int_\gamma x\ dx+y\ dy$, sendo γ o segmento de extremidades (1,1) e (2,3) percorrido no sentido de (1,1) para (2,3).

6. Calcule $\int_\gamma x\ dx+y\ dy+z\ dz$, sendo γ o segmento de reta de extremidades (0,0,0) e (1,2,1) percorrido no sentido de (0,0,0) para (1,2,1).

7. Calcule $\int_\gamma y\ dx+dy+2dz$, sendo γ a interseção do parabolóide $z=x^2+y^2$ com o plano $z=2x+2y-1$, o sentido de percurso deve ser escolhido de modo que a projeção de $\gamma(t)$, no plano xy, caminhe no sentido anti-horário (primeiro parametrize a curva). **Resp.** π

8. Calcule $\int_\gamma 2x\ dx-dy$ em que γ tem por imagem $x^2+y^2=4$, $x\ge 0$ e $y\ge 0$, o sentido de percurso é de (2,0) para (0,2).

9. $\oint_\gamma \frac{-y}{4x^2+y^2}\ dx+\frac{x}{4x^2+y^2}\ dy$, em que γ tem por imagem $4x^2+y^2=9$, o sentido de percurso é anti-horário.

10. Seja $\gamma(t)=(R\cos\ t,R\sin\ t)$, $0\le t\le 2\pi$. Mostre que $\oint_\gamma \frac{-y}{x^2+y^2}\ dx+\frac{x}{x^2+y^2}\ dy$ não depende de $R>0$.

11. Calcule $\oint_\gamma \sqrt[3]{x}\ dx + \dfrac{dy}{1+y^2}$ e $\oint_\gamma \sqrt[3]{x}\ dy + \dfrac{dx}{1+y^2}$, em que γ é o quadrado centrado na origem e lado 2 percorrido no sentido anti-horário.

12. Calcule $\oint_\gamma F \cdot dr$ em que $F(x,y) = (0, x+y^2)$ e γ é a curva do exercício anterior.

13. Calcule $\oint_\gamma (x-y)dx + e^{x+y}dy$, em que γ é a fronteira do triângulo de vértices (0,0), (0,1) e (1,2), orientada no sentido anti-horário. **Resp.** $\dfrac{e^3}{6} - \dfrac{e}{2} + \dfrac{5}{6}$.

14. Calcule $\int_\gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ sendo dados:

    a) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ e $\gamma(t) = (cost, sent, t),\ 0 \leq t \leq 2\pi$. **Resp.** $2\pi^2$.
    b) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x+y+z)\overrightarrow{k}$ e $\gamma(t) = (t, t, 1-t^2),\ 0 \leq t \leq 1$. **Resp.** $-\dfrac{11}{6}$.
    c) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = x\overrightarrow{i} + y^2\overrightarrow{j} + z^2\overrightarrow{k}$ e $\gamma(t) = (2cost, 3sent, t),\ 0 \leq t \leq 2\pi$. **Resp.** $\dfrac{8\pi^3}{3}$.

15. Uma partícula move-se no plano de modo que no instante t sua posição é dada por $\gamma(t) = (t, t^2)$. Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças $\overrightarrow{F}(x,y) = (x+y)\overrightarrow{i} + (x-y)\overrightarrow{j}$ no deslocamento da partícula de $\gamma(0)$ até $\gamma(1)$. **Resp.** 1.

16. Uma partícula desloca-se em um campo de forças dado por $\overrightarrow{F}(x,y,z) = -y\overrightarrow{i} + x\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$. Calcule o trabalho realizado por $\overrightarrow{F}$ no deslocamento da partícula de $\gamma(a)$ até $\gamma(b)$, sendo dados:

    a) $\gamma(t) = (cost, sent, t),\ a = 0$ e $b = 2\pi$. **Resp.** $2\pi + 2\pi^2$.
    b) $\gamma(t) = (2t+1, t-1, t),\ a = 1$ e $b = 2$. **Resp.** $\dfrac{9}{2}$.
    c) $\gamma(t) = (0, cost, sent),\ a = 0$ e $b = 2\pi$. **Resp.** 2π.
    d) $\gamma(t) = (cost, 0, sent),\ a = 0$ e $b = 2\pi$. **Resp.** 0.
    e) $\gamma(t) = (cost, sent, 0),\ a = 0$ e $b = 2\pi$. **Resp.** 0.

17. Encontre o $\nabla \wedge F$ e $\nabla \cdot F$, se F for o campo vetorial definido por $F(x,y,z) = e^{2x}\overrightarrow{i} + 3x^2yz\overrightarrow{j} + (2y^2z+x)\overrightarrow{k}$. **Resp.** $(4yz - 3x^2y)\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + (6xyz)\overrightarrow{k},\ 2e^{2x} + 3x^2z + 2y^2$.

18. Seja $R(t) = 2cost\overrightarrow{i} + 2sent\overrightarrow{j}$ com $0 \leq t \leq 2\pi$ e seja $F(x,y) = (x^2+y)\overrightarrow{i} + 2xy\overrightarrow{j}$. Encontre $\oint F \cdot dR$. **Resp.** -4π.

19. Encontre o trabalho realizado pela força $\overrightarrow{F}$ de $\gamma(-1)$ até $\gamma(1)$, onde $\overrightarrow{F}(x,y) = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ e $\gamma(t) = (t, t^2)$, com $t \in [-1, 1]$. **Resp.** 0.

20. Encontre o trabalho realizado por uma força $\overrightarrow{F}$ para deslocar uma partícula ao longo da curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, onde $\gamma(t) = (cost, sent, 1)$ e $F : \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^3$ é dada por $\overrightarrow{F}(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2+z^2}\overrightarrow{i} + \dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}\overrightarrow{j} + \dfrac{z}{x^2+y^2+z^2}\overrightarrow{k}$.