

2ª Lista de Exercícios de SMA-355 Cálculo 3

Eugenio Massa

Integrais múltiplas - 1 (sem mud. de var.)

1. Calcule as seguintes integrais em (multi-)retângulos:

- | | |
|--|--|
| <p>a) $\iint_Q x e^{xy} dx dy : Q = [1, 2] \times [2, 4]$</p> <p>c) $\iint_Q \sin(x - y) dx dy : Q = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$</p> <p>e) $\iint_Q e^{x+y} dx dy : Q = [1, 2] \times [2, 4]$</p> <p>g) $\iiint_P \cos(x + y + z) dx dy dz : P = [0, 1]^3$</p> <p>i) $\int \dots \int_H \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) dx^n : H = [0, 1]^n$</p> | <p>b) $\iint_Q (x^2 + y^2) dx dy : Q = [2, 4] \times [-1, 1]$</p> <p>d) $\iint_Q (x + y) e^{xy} dx dy : Q = [1, 2] \times [2, 4]$</p> <p>f) $\iiint_P xy^2 z^3 dx dy dz : P = [1, 2] \times [2, 4] \times [0, 1]$</p> <p>h) $\int_H x \cos(y + z) e^w dx dy dz dw : H = [0, 1]^4$</p> <p>i) $\int \dots \int_H \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) dx^n : H = [0, 1]^n$</p> |
|--|--|

2. Calcule a integral iterada e desenhe no plano o conjunto de integração.

- | | |
|--|--|
| <p>a) $\int_1^2 dx \int_0^{2x} xy^3 dy$. Resp. 42.</p> <p>c) $\int_0^4 dy \int_0^y \sqrt{9 + y^2} dx$. Resp. $\frac{98}{3}$.</p> <p>e) $\int_1^4 dy \int_y^{y^2} \sqrt{\frac{y}{x}} dx$. Resp. $\frac{49}{5}$.</p> <p>g) $\int_0^3 dx \int_0^x x^2 e^{xy} dy$. Resp. $e^9/2 - 5$.</p> <p>i) $\int_{\pi/2}^{\pi} dy \int_0^{y^2} \sin \frac{x}{y} dx$. Resp. $\frac{3\pi^2 - 4\pi - 8}{8}$.</p> | <p>b) $\int_0^4 dy \int_0^y dx$. Resp. 8.</p> <p>d) $\int_{-1}^1 dx \int_1^{e^x} \frac{x}{y} dy$. Resp. $\frac{2}{3}$.</p> <p>f) $\int_1^4 dx \int_x^{x^2} \sqrt{\frac{y}{x}} dy$.</p> <p>h) $\int_{\pi/2}^{\pi} dx \int_0^x \sin(4x - y) dy$. Resp. $\frac{1}{3}$.</p> |
|--|--|

3. Estime por baixo e por cima as integrais a seguir (usando a fórmula $(\inf_B f) |B| \leq \iint_B f \leq (\sup_B f) |B|$)

- a) $\iint_R (3x - 2y + 1) dA$ onde R é a região retangular com vértices $(0, -2)$ e $(3, 0)$. **Resp.** $6 < I < 84$.
- b) $\iint_R (y^2 - 4x) dA$ onde R é a região retangular com vértices $(-1, 0)$ e $(1, 3)$.
- c) $\iint_R (x^2 + y) dA$ onde R é a região retangular com vértices $(0, 0)$ e $(4, 2)$.
- d) $\iint_R \sin x dA$ onde R é a região limitada pelas retas $y = 2x$, $y = \frac{x}{2}$ e $x = \pi$.
- e) $\iint_R \cos(x + y) dA$ onde R é a região limitada pelas retas $y = x$, $x = \pi$ e o eixo x . **Resp.** $-\pi/2 < I < \pi/2$.
- f) $\iint_R x^2 \sqrt{9 - y^2} dA$ onde R é a região limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 9$. **Resp.** $0 < I < 3^5 \pi$.
- g) $\iint_R \frac{y^2}{x^2} dA$ onde R é a região limitada pelas retas $y = x$, $y = 2$ e pela hipérbole $xy = 1$.

4. Ache o volume do sólido sob o plano $z = 4x$ e acima da circunferência $x^2 + y^2 = 16$ no plano xy . Faça um esboço do sólido. **Resp.** $\frac{512}{3}$.

5. Ache por integração dupla, o volume da parte do sólido limitada pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ que está no primeiro octante. Faça um esboço do sólido. **Resp.** $\frac{32\pi}{3}$

6. Ache o volume do sólido no primeiro octante, limitado pelos cilindros $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + z^2 = 4$. Faça um esboço do sólido. **Resp.** $\frac{16}{3}$.
7. Encontre o volume do sólido limitado pela superfície $f(x, y) = 4 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16}$, pelos planos $x = 3$, $y = 2$ e pelos três planos coordenados. **Resp.** $V = 21,5$.
8. Encontre $\int_0^1 \int_1^2 x^2 e^{xy} dy dx$. **Resp.** $\frac{e^2 - 3}{4}$.
9. Encontre a medida do volume do sólido acima do plano xy , limitado pelo parabolóide elíptico $z = x^2 + 4y^2$ e pelo cilindro $x^2 + 4y^2 = 4$. **Resp.** $V(S) = 4\pi$
10. Encontre a área da região limitada pelas curvas $y = -x^2 + 6x + 5$ e $y = x^2 - 6x + 8$. **Resp.** $A(R) \cong 10,5$
11. Use integrais duplas para encontrar a área da região limitada pelas curvas dadas no plano xy . Faça um esboço da região:
- a) $y = x^3$ e $y = x^2$. **Resp.** $\frac{1}{12}$. b) $y = x^2 - 9$ e $y = 9 - x^2$. **Resp.** 72.
12. Calcule a integral iterada e esboce no espaço \mathbb{R}^3 o conjunto de integração.
- a) $\int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 x dz dy dx$. **Resp.** 3. b) $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{x+y} (x + y + z) dz dy dx$. **Resp.** $\frac{7}{8}$.
- c) $\int_{-1}^0 \int_e^{2e} \int_0^{\pi/3} y(\ln z)(\operatorname{tg} x) dx dz dy$. **Resp.** $-e(\ln 2)^2$. d) $\int_0^{\pi/2} \int_z^{\pi/2} \int_0^{xz} \cos\left(\frac{y}{z}\right) dy dx dz$. **Resp.** $\frac{\pi}{2} - 1$.
13. Calcule:
- a) $\iiint_S z dV$, se S for a região limitada pelo tetraedro com vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$ e $(1, 0, 1)$.
Resp. $\frac{1}{24}$.
- b) $\iiint_S xy dV$, se S for o paralelepípedo no primeiro octante, limitado pelos planos coordenados e pelos planos $x = 2$, $y = 3$ e $z = 4$. **Resp.** 36.
14. Encontre o volume do sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 25$, pelo plano $x + y + z = 8$ e pelo plano xy . **Resp.** $500 + 10\pi$.
15. Dado $\int_2^4 dy \int_1^{\sqrt{y}} f(x, y) dx = \iint_D f(x, y) dx dy$, caracterizar D .
16. Escreva a integral dupla equivalente, invertendo a ordem de integração para cada um dos problemas abaixo. Verifique o resultado, calculando ambas as integrais
- a) $\int_0^2 \int_1^{e^x} dy dx$ b) $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 dx dy$ c) $\int_0^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} y dx dy$ d) $\int_{-2}^1 \int_{x^2+4x}^{3x+2} dy dx$
17. Inverta a ordem de integração em $\int_{-1}^1 \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy dx$.
18. Calcule o volume de cada um dos sólidos e faça os gráficos desses sólidos:
- (a) sólido delimitado pelas regiões $0 \leq y \leq 1 - x$, e $0 \leq z \leq 1 - x^2$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$;
- (b) sólido delimitado pelas regiões $0 \leq x \leq y$ e $0 \leq z \leq 4 - y^2$;
- (c) sólido delimitado pelas regiões $0 \leq y \leq x$, $z \geq 0$ e $x^2 + z^2 \leq 1$.
19. * Considere a integral

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq e} \frac{x^3}{(x^2 + y^2 + z^2)^\pi} dx dy dz$$

Consegue dizer quanto vale? (Justifique!)

E a integral em \mathbb{R}^n

$$\int_{|\mathbf{x}| \leq e} \frac{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})^3}{|\mathbf{x}|^\pi} dV_n$$

onde \mathbf{v} é um vetor fixado em \mathbb{R}^n ?

GABARITO

Exercício 1 a) $(e^8 - 3e^4 + 2e^2)/4$, b) $116/3$, c) 0 , e) $(e^2 - e)(e^4 - e^2)$, g) $-\sin(3) + 3\sin(2) - 3\sin(1)$, i) 2^{-n} , j) $n/2$.

Exercício 16 a) $\int_1^{e^2} dy \int_{\ln(y)}^2 dx = e^2 - 3$

Exercício 19 sugestão: escreva o caso particular $n = 1$ e observe ele!