

1ª Lista de Exercícios de SMA-355 Cálculo 3

Eugenio Massa

Trasformações, Matriz Jacobiana e outras derivadas

1. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dadas por

$$f(x, y) = (e^{x+2y}, \sin(y+2x)) \quad \text{e} \quad g(u, v, w) = (w, 2v - u).$$

a) Encontre as matrizes jacobianas de f e g .

b) Encontre a matriz jacobiana da composta $h(u, v, w) = f(g(u, v, w))$,

(Primeiro use o produto dos Jacobianos e em seguida verifique calculando a composta e derivando diretamente).

2. Sejam $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dadas por

$$f(x, y, z) = (x^2 + z, 2x + y) \quad \text{e} \quad g(u, v, w) = (w, \sin v, e^u).$$

a) Encontre as matrizes jacobianas de f e g .

b) Encontre a matriz jacobiana da composta $h(u, v, w) = f(g(u, v, w))$.

(Primeiro use o produto dos Jacobianos e em seguida verifique calculando a composta e derivando diretamente).

3. Considere a transformação $T(x, y) = (2x, y)$. Qual é a imagem do círculo $x^2 + y^2 = 1$ pela transformação T ? Faça um esboço da imagem.

4. Considere a transformação $T(x, y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$ definida para todo $(x, y) \neq (0, 0)$.

a) Mostre que T leva círculos centrados na origem de raio r em círculos centrados na origem de raio $1/r$.

b) Mostre que T leva a semi-reta $(x, y) = t(x_0, y_0)$, $t > 0$, $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ nela mesma.

c) Mostre que a inversa de T é a própria T .

d) desenhe T como um campo vetorial.

5. Calcule matriz Jacobiana, rotacional e divergente dos seguintes campos vetoriais:

a) $F(x, y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$

b) $F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$

c) $F(x, y) = (3x + 2y, x - 5y)$

d) $F(x, y, z) = (3x + 2y - z, x - 5y, x - y + z)$

e) $F(x, y, z) = (x, y, z)$

f) $F(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{x^2+y^2+z^2}$

g) $F(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$

h) $F(x, y, z, w) = (2x - y, y + w - z, z - w, w^2 - x)$ (deste não calcule o rotacional!)

GABARITO

Exercício 1 $J_f(x, y) = \begin{bmatrix} e^{x+2y} & 2e^{x+2y} \\ 2 \cos(y+2x) & \cos(y+2x) \end{bmatrix}$, $J_g(u, v, w) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$,

$$J_h(u, v, w) = \begin{bmatrix} e^{w+4v-2u} & 2e^{w+4v-2u} \\ 2 \cos(2w+2v-u) & \cos(2w+2v-u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2e^{w+4v-2u} & 4e^{w+4v-2u} & e^{w+4v-2u} \\ -\cos(2w+2v-u) & 2 \cos(2w+2v-u) & 2 \cos(2w+2v-u) \end{bmatrix}$$