

1ª Lista de Exercícios de SMA-333- Cálculo 3

Eugenio Massa

Seqüências numéricas

1. Mostre (por indução) as seguintes afirmações:

a) $\sum_{n=1}^N n = \frac{N(N+1)}{2}$ b) $\sum_{n=1}^N n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$ c) $\sum_{n=1}^N n^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4} = \left(\sum_{n=1}^N n\right)^2$
d) $n! \geq 2^{n-1}$ e) se $x > -1$ então $(1+x)^n \geq 1+nx$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. Calcule sup e inf e encontre todos os pontos de acumulação dos subconjuntos de \mathbb{R} abaixo:

a) Conjuntos \mathbb{N} e \mathbb{Q} ;

b) conjunto $X = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

c) conjunto $[0, 1) \cup \{3\}$.

3. Calcule os primeiros 3 termos de cada seqüência e também o 5º:

a) $\left\{ a_n = \frac{n}{2^{n+1}} \right\}_{n=0}^{\infty}$ b) $\{(-1)^{n^2} n\}_{n=1}^{\infty}$ c) $\{2 + \cos(n\pi)\}_{n=0}^{\infty}$
d) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{2}{a_n - 2}, \quad \forall n \geq 2$

4. Encontre uma possível expressão do termo geral (n -ésimo termo) de cada seqüência.

a) 0, 2, 0, 2, 0, 2, ... b) 0, 4, 16, 36, 64, 100, ... c) $1, -\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \dots$ d) 1, 2, 6, 24, 120, ...

5. Determine se cada seqüência converge, diverge ou é oscilante. Se convergir, calcule seu limite.

a) $\left\{ -\frac{\ln(n^2)}{n} \right\}$ b) $\left\{ \sin n \left(\ln n - \frac{1}{2} \ln(n^2 + 1) \right) \right\}$ c) $\left\{ (1 + 3n)^{\frac{1}{n}} \right\}$
d) $\left\{ \ln \left(1 - \frac{7}{n} \right)^n \right\}$ e) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2} - n} \right\}$ f) $\left\{ \left(\frac{3}{n} \right)^{\frac{1}{n}} \right\}$
g) $\left\{ \frac{n}{3^n} \right\}$ h) $\left\{ \frac{e^n + e^{-n}}{e^n - e^{-n}} \right\}$ i) $\{n[2 - \sin(n^2 + 1)]\}$
l) $\left\{ \frac{(-1)^n \cos n}{4^n} \right\}$ m) $\left\{ \frac{(-1)^n n^2}{n^3 - 3} \right\}$ n) $\left\{ \frac{3 + \sin n}{n} \right\}$
o) $\left\{ \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right) - 1 \right\}$ p) $\left\{ 6 \left(-\frac{5}{6} \right)^n \right\}$ q) $\{[\cos(n+1)]^2 - n^2\}$
r) $\left\{ \frac{1}{n} \sin(n) \right\}$ s) $\left\{ n \sin \left(\frac{1}{n} \right) \right\}$ t) $\left\{ \int_1^n \frac{1}{x^\alpha} \right\} : \alpha > 0$

6. Mostre que, se $0 < c < d$, então a seqüência

$$a_n = (c^n + d^n)^{1/n}$$

é limitada. Em seguida mostre que ela converge a d (sugestão: use o confronto).

7. Sejam $\{a_n\}, \{b_n\}$ seqüências tais que $|a_n - b_n| \leq \frac{1}{n}$: mostre que se $a_n \rightarrow a$ então $b_n \rightarrow a$.

8. Mostre que combinações lineares e produtos de seqüências limitadas são limitados.

9. Calcule os dois limites a seguir, usando as propriedades ou os teoremas conhecidos e justificando cada passagem.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{4n^2 + n} - 2n$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} n[2 - \sin(n^2 + 1)]$
c) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(1 - \cos(1/n))$ d) $\lim_{n \rightarrow \infty} n[4 - e^{-\cos(n)}]$

10. Prove que:

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n}{n} \right) = +\infty$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \right) = \frac{1}{2}$

11. Prove que se a sequência $\{a_n\}$ é limitada e $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$ então $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n b_n) = 0$.

12. Determine se a sequência abaixo é crescente, decrescente ou não monótona e também se ela é limitada superiormente ou inferiormente. Indique, justificando, se a sequência é convergente ou divergente.

a) $\left\{ \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) \right\}_{n=1}^{\infty}$ b) $\{(-1)^{2n}\}_{n=0}^{\infty}$ c) $\left\{ \frac{n^n}{n!} \right\}_{n=1}^{\infty}$
 d) $\left\{ \frac{3^n}{n!} \right\}_{n=1}^{\infty}$ e) $\{\sin(\pi n)\}_{n=0}^{\infty}$ f) $\left\{ \frac{2n-1}{3n+1} \right\}_{n=0}^{\infty}$

13. Encontre os seis primeiros termos da sequência e, depois, encontre o n -ésimo termo.

a) $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{n+1} a_n$ b) $a_1 = 1, a_2 = 3; a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}, n \geq 2$

14. Dada a sequência:

$$\{\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots\}$$

diga se é crescente, decrescente ou não monótona, se é limitada, e calcule o seu limite (sugestão: pode tentar escrever na forma $a_{n+1} = f(a_n)$).

15. Mostre que a sequência definida recursivamente por:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$$

satisfaz $0 < a_n < 2$ e é crescente. Podemos concluir que ela converge? Se sim, justifique e calcule o seu limite.

16. Mostre que a sequência definida recursivamente por $a_1 = 2$ e $a_{n+1} = \frac{1}{3-a_n}$ é decrescente e satisfaz $0 < a_n \leq 2, \forall n \geq 1$. Deduza que $\{a_n\}$ converge e encontre seu limite.

17. Usando a definição, prove que se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \in \mathbb{R}$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |L|$. Se $L \neq 0$ temos que o vice-versa não vale, **dê um exemplo**.

18. Diga se a sequência de termo geral $a_n = \int_{-n}^0 e^{2x} dx$ é convergente para $n \rightarrow \infty$.

19. Calcule limite inferior e limite superior das sequências abaixo.

a) $(-1)^n + \frac{(-1)^n}{n}$ b) $((-1)^n + 1) \frac{n+1}{n}$ c) $n^{(-1)^n}$ d) $\sin(n)$ e) $\frac{1}{n} \sin(n)$

20. Calcule

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{A_n} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ onde $A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{n^2} \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{A_n} \frac{1}{(x^2+y^2)^2}$ onde $A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq n^2\}$