

# 1 Algumas primitivas

Simples...

$$\int c dt = cx + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + k, \quad \int \cos(x) dx = \sin(x) + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\int Sh(x) dx = Ch(x) + k, \quad \int Ch(x) dx = Sh(x) + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + k, \quad \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = SetSh(x) + k,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

outras (cuidado: definir um apropriado intervalo!)

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k, \quad k \in \mathbb{R} \quad \text{se } \alpha \neq -1$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x} dx &= \ln(x) + k, \quad k \in \mathbb{R}, \text{ em } (0, \infty) \\ &= \ln(-x) + k, \quad k \in \mathbb{R}, \text{ em } (-\infty, 0) \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx &= SetCh(x) + k, \text{ em } (1, \infty) \\ &= -SetCh(-x) + k, \text{ em } (-\infty, -1) \end{aligned}$$

## 2 Técnicas para calcular primitivas

### Linearidade

Sejam  $f, g$  contínuas, Então

$$\int (\alpha \mathbf{f} + \beta \mathbf{g}) = \alpha \left( \int \mathbf{f} \right) + \left( \beta \int \mathbf{g} \right)$$


---

### Fórmula de integração por partes

Sejam  $f, g$  contínuas e deriváveis com derivadas contínuas. Então

$$\int \mathbf{f}'(\mathbf{t})\mathbf{g}(\mathbf{t}) \, d\mathbf{t} = \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \int \mathbf{f}(\mathbf{t})\mathbf{g}'(\mathbf{t}) \, d\mathbf{t}.$$


---

### Fórmula de integração por substituição

Sejam  $g$  contínua e derivável com derivada contínua,  $h$  contínua. Então

$$\int \mathbf{h}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))\mathbf{g}'(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \mathbf{H}(\mathbf{g}(\mathbf{x})),$$

sendo  $\mathbf{H}(\mathbf{y}) = \int \mathbf{h}$ .

### Interpretação como mudança de variável:

$$\begin{aligned} \int \mathbf{h}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))\mathbf{g}'(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \mathbf{H}(\mathbf{y}) + \mathbf{k} \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{g}(\mathbf{x})}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R} \\ &= \int \mathbf{h}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{g}(\mathbf{x})} \end{aligned}$$

podemos interpretar assim:

- *substituímos  $g(x) = y$  e  $g'(x)dx = dy$ ,*
- *calculamos a primitiva,*
- *podemos de volta  $y = g(x)$ .*

mais em geral, se a mudança é  $f(x) = g(y)$ , então  $f'(x) dx = g'(y) dy$

**Para as integrais definidas:**

- Sejam  $f, g$  contínuas, Então

$$\int_a^b (\alpha \mathbf{f} + \beta \mathbf{g}) = \alpha \left( \int_a^b \mathbf{f} \right) + \beta \left( \int_a^b \mathbf{g} \right)$$

- Sejam  $f, g$  contínuas e deriváveis com derivadas contínuas em  $[a, b]$ . Então

$$\int_a^b \mathbf{f}' \mathbf{g} = [\mathbf{f} \mathbf{g}]_a^b - \int_a^b \mathbf{f} \mathbf{g}'$$

$$\int_a^b \mathbf{f}'(\mathbf{x}) \mathbf{g}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{b}) \mathbf{g}(\mathbf{b}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) \mathbf{g}(\mathbf{a}) - \int_a^b \mathbf{f}(\mathbf{x}) \mathbf{g}'(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

- Sejam  $g$  contínua e derivável com derivada contínua em  $[a, b]$  e  $h$  contínua em  $Im(g|_{[a,b]})$ , então

$$\begin{aligned} \int_a^b \mathbf{h}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) \mathbf{g}'(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= [H(\mathbf{g}(\mathbf{x}))]_a^b = H(\mathbf{g}(\mathbf{b})) - H(\mathbf{g}(\mathbf{a})) \\ &= [H(\mathbf{y})]_{\mathbf{g}(\mathbf{a})}^{\mathbf{g}(\mathbf{b})} = \int_{\mathbf{g}(\mathbf{a})}^{\mathbf{g}(\mathbf{b})} \mathbf{h}(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \end{aligned}$$

podemos interpretar assim:

- *substituímos  $g(x) = y$  e  $g'(x)dx = dy$ ,*
- *substituímos  $g(a)$  e  $g(b)$  como extremos de integração,*
- *calculamos a integral.*

### **3 Integral de funções racionais (método das frações parciais)**

Estas funções podem sempre ser integradas explicitamente: veja roteiro na lista de exercícios.

## 4 Dicas de integração

- **produto  $x^n h(x)$  onde conheça primitivas de  $h$ :**

integre por partes pondo  $g(x) = x^n$ , assim na integral que sobra terá  $g'(x) = nx^{n-1}$ ... continuando até eliminar a potência.

Funciona para  $x^n e^x$ ,  $x^n \cos(x)$ , ....

**Exemplo:**

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + \int 2e^x dx = \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + k, \quad k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- **produto  $x^n h(x)$  onde  $h$  tem derivada racional:**

integre por partes pondo  $g(x) = h(x)$ , assim na integral que sobra terá apenas uma racional.

Funciona para  $x^n \ln(x)$ ,  $x^n \operatorname{arctg}(x)$ , ....

**Exemplo:**

$$\int x^2 \ln(x) dx = x^3 \ln(x)/3 - \int (x^3/3x) dx = x^3 \ln(x)/3 - x^3/9 + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

- **quadrado de trigonométrica ou hiperbólica:**

integre por partes e depois use identidades...

**Exemplo:**

$$\begin{aligned} \int \operatorname{Ch}^2(x) dx &= \operatorname{Sh}(x) \operatorname{Ch}(x) - \int \operatorname{Sh}^2(x) dx = \\ &= \operatorname{Sh}(x) \operatorname{Ch}(x) - \int (\operatorname{Ch}^2(x) - 1) dx \\ \text{logo } 2 \int \operatorname{Ch}^2(x) dx &= \operatorname{Sh}(x) \operatorname{Ch}(x) + \int 1 dx = \operatorname{Sh}(x) \operatorname{Ch}(x) + x + k, \quad k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- **trigonométrica com exponencial:**

integre por partes duas vezes e leve do outro lado...

Funciona também para  $\cos(x)$ , ....

**Exemplo:**

$$\begin{aligned} \int e^x \cos(x) dx &= e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x) dx = \\ &= e^x \sin(x) - [e^x (-\cos(x)) - \int e^x (-\cos(x)) dx] \\ \text{logo } 2 \int e^x \cos(x) dx &= e^x \sin(x) + e^x \cos(x) + k, \quad k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- **substituição trigonométrica ou hiperbólica:** quando aparece o termo  $\sqrt{\pm a^2 \pm x^2}$ , se não tiver substituição melhor:

- no caso  $\sqrt{a^2 - x^2}$ , substitua  $x = a \sin(t)$ ,  $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ ;
- no caso  $\sqrt{a^2 + x^2}$ , substitua  $x = a \operatorname{Sh}(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ;
- no caso  $\sqrt{x^2 - a^2}$ , substitua  $x = \pm a \operatorname{Ch}(t)$ ,  $t > 0$ .

isso leva a eliminar a raiz usando relações trigonométricas-hiperbólicas.

**Exemplo:**

$$\int \sqrt{4 + x^2} dx = (x = 2\operatorname{Sh}(t), dx = 2\operatorname{Ch}(t) dt) \int \sqrt{4(1 + \operatorname{Sh}^2(t))} 2\operatorname{Ch}(t) dt \\ = \int \sqrt{4\operatorname{Ch}^2(t)} 2\operatorname{Ch}(t) dt = \int 4\operatorname{Ch}^2(t) dt = \dots$$

**Alternativa:**

Também pode funcionar integrar por partes:

$$\int \sqrt{4 + x^2} dx = x\sqrt{4 + x^2} - \int x \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} dx = x\sqrt{4 + x^2} - \int \frac{4+x^2}{\sqrt{4+x^2}} dx + \int \frac{4}{\sqrt{4+x^2}} dx:$$

agora a primeira integral é igual ao lado esquerdo, a segunda é imediata (*SetSh*)

- **Caso**  $\int x^n (\sqrt{\pm a^2 \pm x^2})^{\pm 1}$

- Se  $n$  é par use a substituição trigonométrica ou hiperbólica acima.
- Se  $n$  é ímpar, também as substituições  $y = \pm a^2 \pm x^2$  ou  $z = \sqrt{\pm a^2 \pm x^2}$  podem funcionar.

**Exemplo:**

$$\int x^3 \sqrt{9 + x^2} dx = (y = 9 + x^2, dy = 2x dx) \int (y - 9) \sqrt{y} dy / 2 = \\ = \int (y^{3/2} - 9\sqrt{y}) dy / 2 = \dots \\ \int x^3 \sqrt{9 + x^2} dx = (z = \sqrt{9 + x^2}, 2z dz = 2x dx) \\ \int (z^2 - 9) z dz = \int (z^4 - 9z^2) dz = \dots$$

#### 4.1 Casos que podem ser reduzidos a racionais

Seja  $R[a,b,..]$  uma função racional nas variáveis  $a, b, ..$

- $\int R[\sin(x)] \cos(x) dx = \int R(t) dt$  *pondo*  $t = \sin(x)$ .

O mesmo funciona para  $R[\cos(x)] \sin(x) dx$  e **análogos hiperbólicos**.

também os casos  $R[\sin(x), \cos(x)^2] \cos(x)$  e **análogos** encaixam pois pode ver como  $R[\sin(x), 1 - \sin(x)^2] \cos(x)$

**Exemplo:**

$$\int \frac{\sin(x)^2 - 3 \sin(x)}{1 - \sin(x) + \cos^2(x)} \cos(x) dx = \int \frac{t^2 - 3t}{1 - t + 1 - t^2} dt$$

- $\int R[\sin(x), \cos(x)] dx$  sempre pode ser tratada da maneira seguinte (mas deixar como última tentativa, pois as contas são feias!)

*ponha*  $t = \tan(x/2)$ , assim  $\sin(x) = 2t/(1+t^2)$ ,  $\cos(x) = (1-t^2)/(1+t^2)$  e  $dx = 2dt/(1+t^2)$ .

Para o caso  $\int R[Sh(x), Ch(x)] dx$  *ponha*  $t = Th(x/2)$ , assim  $Sh(x) = 2t/(1-t^2)$ ,  $Ch(x) = (1+t^2)/(1-t^2)$  e  $dx = 2dt/(1-t^2)$ .

**Exemplo:**

$$\int \frac{\sin(x)^2 - 3 \cos(x)}{1 - \sin(x) + \cos(x)} dx = \int \frac{4t^2/(1+t^2) - 3(1-t^2)}{1 - 2t + (1-t^2)} \frac{2 dt}{1+t^2}$$

- $\int \sin^n(x) \cos^k(x) dx$ , ( $n, k \in \mathbb{Z}$ ):

- *se  $n$  ou  $k$  é ímpar, substitua a outra:*

**Exemplo:**

$$\int \sin^8(x) \cos^7(x) dx = (t = \sin(x), dt = \cos(x) dx)$$

$$\int t^8 (1-t^2)^3 dt = \dots$$

- *se ambas são par, use as fórmulas de duplicação para baixar o grau:*

**Exemplo:**

$$\int \sin^2(x) \cos^2(x) dx = \int (1 - \cos(2x))/2 \cdot (1 + \cos(2x))/2 dx =$$

$$= \int (1 - \cos^2(2x))/4 dx = \dots$$

- $\int \sin(nx) \cos(kx) dx$  **ou**  $\int \sin(nx) \sin(kx) dx$  **ou**  $\int \cos(nx) \cos(kx) dx$ :

use fórmulas trigonométricas

**Exemplo:**

$$\int \sin(nx) \cos(kx) dx = \int (\sin(nx - kx) + \sin(nx + kx))/2 dx =$$

$$= \dots$$