1 Definição de integral (definida) de Riemann

Seja a seguir sempre $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **limitada (com $[a, b]$ limitado);**
logo existem m, M tais que $m \leq f(x) \leq M$.

Definição: chamamos **Partição de $[a, b]$**
um conjunto finito de pontos da forma

$$\mathfrak{P} = \{x_0, ..., x_n : \; a = x_0 < x_1 < x_2 < .. < x_{n-1} < x_n = b\} \; ;$$

também denotamos por $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ e $\Delta\mathfrak{P} = max\{\Delta x_i\}$.

Dadas f e $\mathfrak{P}$ definimos
Soma inferior associada a f e $\mathfrak{P}$:

$$\mathbf{s(f, \mathfrak{P})} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{m_i \Delta x_i}, \text{ onde } m_i = \inf\{f(x) : \; x \in [x_{i-1}, x_i]\} \; ;$$

Soma superior associada a f e $\mathfrak{P}$:

$$\mathbf{S(f, \mathfrak{P})} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{M_i \Delta x_i}, \text{ onde } M_i = \sup\{f(x) : \; x \in [x_{i-1}, x_i]\} \, .$$

Uma soma de Riemann associada a f e $\mathfrak{P}$:

$$\mathcal{S}_\xi(\mathbf{f}, \mathfrak{P}) = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{f(\xi_i) \Delta x_i}, \text{ onde cada } \xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \, .$$

OBS: *Vale $s(f, \mathfrak{P}) \leq \mathcal{S}_\xi(f, \mathfrak{P}) \leq S(f, \mathfrak{P})$ para qualquer $\mathfrak{P}$ e quaisquer ξ_i.*

Definição de integral:
Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **limitada (com $[a, b]$ limitado);**

- se $I := \sup_{\forall\mathfrak{P}} s(f, \mathfrak{P}) = \inf_{\forall\mathfrak{P}} S(f, \mathfrak{P}) = \lim_{\Delta\mathfrak{P}\to 0} \mathcal{S}_\xi(f, \mathfrak{P})$ dizemos que
  - **f é Riemann integrável em $[a, b]$,**
  - I é a **integral definida (de Riemann) de f em $[a, b]$:** $\qquad I = \int_a^b f$;
- se $\sup_{\forall\mathfrak{P}} s(f, \mathfrak{P}) \neq \inf_{\forall\mathfrak{P}} S(f, \mathfrak{P})$ ou $\nexists \lim_{\Delta\mathfrak{P}\to 0} \mathcal{S}_\xi(f, \mathfrak{P})$ dizemos que
  - **f não é Riemann integrável em $[a, b]$.**

---

2 Teoremas de integrabilidade

(Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada, m, M tais que $m \leq f(x) \leq M$).

Teorema (caracterização da integrabilidade).
f é Riemann integrável em $[a,b]$ se e só se vale

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \mathfrak{P} : S(\mathfrak{P}) - s(\mathfrak{P}) < \varepsilon \,.$$

Em outras palávras,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \mathfrak{P} : \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \Delta x_i < \varepsilon \,.$$

Teorema (integrabilidade das contínuas).
Se f é contínua em $[a,b]$ **então f é Riemann integrável em $[a,b]$.**

Teorema (integrabilidade das contínuas por partes).
Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é limitada e contínua exceto em um número finito de pontos, **então f é Riemann integrável em $[a,b]$.**

Teorema (integrabilidade das monótonas).
Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é monótona **então f é Riemann integrável em $[a,b]$.**

3 Algumas propriedades da integral

- se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é limitada e integrável, e $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ é tal que $\{x \in [a,b] : \ f(x) \neq g(x)\}$ contém um número finito de pontos, **então** g **é integrável e** $\int_a^b f = \int_a^b g$.

Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitadas e integráveis. Então

3) $\alpha f + \beta g$ **é integrável** e $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \left(\int_a^b f\right) + \beta \left(\int_a^b g\right)$, para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

5) $|f|$ **é integrável** e $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$,

6) fg **é integrável**

1) $f \geq 0$ **em** $[a,b]$ **implica** $\int_a^b f \geq 0$.

4) $f \geq g$ **em** $[a,b]$ **implica** $\int_a^b f \geq \int_a^b g$.

2) $f = 0$ **em** $[a,b]$ **implica** $\int_a^b f = 0$.

- *$f \geq 0$ e contínua em $[a,b]$, com $\int_a^b f = 0$, imlica $f = 0$ em $[a,b]$*

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ limitada.

- Se $[a,b] \subseteq D_f$ e f é integrável em $[a,b]$ e $[\alpha, \beta] \subseteq [a,b]$, **então** f **é integrável em** $[\alpha, \beta]$.
- Se $[a,b], [b,c] \subseteq D_f$ e f é integrável em $[a,b]$ e em $[b,c]$, **então** f **é integrável em** $[a,c]$ **e vale**

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$

Definição:

Se f é integrável em $[a,b]$, definimos

$$\int_b^a f := -\int_a^b f \qquad e \qquad \int_a^a f := 0 .$$

Desta maneira a fórmula $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$ **vale seja qual for a ordem de** a, b, c **(desde que tudo faça sentido!)**.

4 Integral e àrea

- Seja $R \subseteq \mathbb{R}^2$ uma região do plano definida como

$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [a, b], \quad 0 \le y \le f(x)\right\}$$

onde $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é limitada, integrável e $f \ge 0$.
Então a área da região R é dada por

$$\mathbf{A_R = \int_a^b f}$$

- Seja $R \subseteq \mathbb{R}^2$ uma região do plano definida como

$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [a, b], \quad f(x) \le y \le 0\right\}$$

onde $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é limitada, integrável e $f \le 0$.
Então a área da região R é dada por

$$\mathbf{A_R = -\int_a^b f}$$

- Seja $R \subseteq \mathbb{R}^2$ uma região do plano definida como

$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [a, b], \quad 0 \le y \le f(x) \ ou \ 0 \ge y \ge f(x)\right\}$$

onde $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é limitada e integrável.
Então a área da região R é dada por

$$\mathbf{A_R = \int_a^b |f|}$$

- Seja $R \subseteq \mathbb{R}^2$ uma região do plano definida como

$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [a, b], \quad f(x) \le y \le g(x)\right\}$$

onde $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ são limitadas, integráveis e $f \le g$.
Então a área da região R é dada por

$$\mathbf{A_R = \int_a^b g - f}$$

- Seja $R \subseteq \mathbb{R}^2$ uma região do plano definida como

$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [a, b], \quad f(x) \leq y \leq g(x) \ ou \ g(x) \leq y \leq f(x)\right\}$$

onde $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ são limitadas e integráveis.
Então a área da região R é dada por

$$\mathbf{A_R} = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} |\mathbf{g} - \mathbf{f}|$$

5 Teorema da média e teorema fundamental do calculo integral

Teorema (**Teorema da média integral).**
Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é limitada e integrável (seja $m \leq f(x) \leq M$ em $[a, b]$) **então**

- $m \leq \frac{\int_a^b f}{b-a} \leq M$
- se f é também contínua **então existe** $c \in (a, b)$ **tal que**

$$\frac{\int_a^b f}{b-a} = f(c)$$

Definição
Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada e integrável e $c \in [a, b]$.
chamamos **Função integral** a função

$$F_c : [a, b] \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_c^x f \,.$$

Observe que para outro ponto $d \in [a, b]$ vale $F_d(x) := \int_d^x f = \int_d^c f + F_c(x)$

Teorema.
Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é limitada e integrável, $c \in [a, b]$ e

$$F_c : [a, b] \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_c^x f$$

entao vale

- F_c **é limitada e contínua**
- se f é contínua em $p \in [a, b]$, **então** F_c **é derivável em** p **e vale** $F_c'(p) = f(p)$.

Definição

dadas $f, F : I \to \mathbb{R}$, sendo I intervalo, se $F' = f$ em I dizemos que **F é primitiva de f em I**.

Vale:

- se F é primitiva de f em I então $F + c$ também, $\forall\, c \in \mathbb{R}$;
- se F, G são primitivas de f em I então $F - G = const$

Teorema (**Teorema Fundamental do Cálculo**).
Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua, $c \in [a, b]$ e $F_c : [a, b] \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_c^x f$ vale:

- **F_c é derivável em $[a, b]$ e $F_c' = f$ em $[a, b]$**, (*i.e, F_c é primitiva de f em $[a, b]$*).
- **se G é uma primitiva de f em $[a, b]$ então $\int_a^b f = G(b) - G(a)$**.
(notação: $G(b) - G(a) = [G]_a^b$)

Definição:

Indicaremos com $\int f$ a **integral indefinida de f**: a família (conjunto) de todas as primitivas de f (num certo intervalo fixado):

$$\int f = \left\{ \left(\int_a^x f \right) + k,\ k \in \mathbb{R} \right\}.$$

---

cuidado:

- $\int_a^b f$ é um número,
- $\int_a^x f$ é uma função,
- $\int f$ é uma família de funções.

6 Derivação da função integral

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua (logo limitada e integrável), $c \in [a, b]$ e

$$\mathbf{F} : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \to \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto \int_{\mathbf{c}}^{\mathbf{x}} \mathbf{f}\,.$$

Então vale $\mathbf{F}'(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ para todo $x \in [a, b]$.

Agora seja

$$\mathbf{G} : [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \to \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{c}} \mathbf{f}\,.$$

Então vale $\mathbf{G}'(\mathbf{x}) = -\mathbf{f}(\mathbf{x})$ para todo $x \in [a, b]$.

Agora seja $g : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ derivável e

$$\mathbf{G} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto \int_{\mathbf{c}}^{\mathbf{g}(\mathbf{x})} \mathbf{f}\,.$$

Então vale $\mathbf{G}'(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))\mathbf{g}'(\mathbf{x})$ para todo $x \in [\alpha, \beta]$.

Agora sejam $g, h : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ deriváveis e

$$\mathbf{G} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto \int_{\mathbf{h}(\mathbf{x})}^{\mathbf{g}(\mathbf{x})} \mathbf{f}\,.$$

Então vale $\mathbf{G}'(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))\mathbf{g}'(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{h}(\mathbf{x}))\mathbf{h}'(\mathbf{x})$ para todo $x \in [\alpha, \beta]$.

7 Volumes e Superfícies

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, com $f \geq 0$, e seja

$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [a, b], \quad 0 \leq y \leq f(x)\right\}$$

O Volume do **sólido de rotação** obtido quando a regiâo R roda ao redor do **eixo** $\overrightarrow{x}$ é

$$V_{\overrightarrow{x}} = \int_a^b \pi f^2(x)\, dx$$

O Volume do **sólido de rotação** obtido quando a regiâo R roda ao redor do **eixo** $\overrightarrow{y}$ é (*assuma* $a \geq 0$)

$$V_{\overrightarrow{y}} = \int_a^b 2\pi x f(x)\, dx$$

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, com derivada contínua, e seja γ a curva dada pelo gráfico de f

O **comprimento de** γ é

$$c = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

A área da **superfície de rotação** obtida quandoγ roda ao redor do **eixo** $\overrightarrow{x}$ é (*assuma* $f \geq 0$)

$$A_{\overrightarrow{x}} = \int_a^b 2\pi \sqrt{1 + f'(x)^2} f(x)\, dx$$

A área da **superfície de rotação** obtida quando γ roda ao redor do **eixo** $\overrightarrow{y}$ é (*assuma* $a \geq 0$)

$$A_{\overrightarrow{y}} = \int_a^b 2\pi x \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

8 Posição, velocidade e aceleração

Sabemos que se s(t) descreve a posição de uma partícula sobre uma reta em função do tempo então

- $v(t) := s'(t)$ representa a **velocidade**,
- $a(t) := v'(t) = s''(t)$ representa a **aceleração**,

Isso significa que

- s **é uma primitiva de** v, logo (TFC) $s(t) - s(t_0) = \int_{t_0}^{t} v$;
- v **é uma primitiva de** a, logo (TFC) $v(t) - v(t_0) = \int_{t_0}^{t} a$;

Obtemos então as fórmulas

- $\mathbf{v}(\mathbf{t}) = \mathbf{v}(\mathbf{t_0}) + \displaystyle\int_{\mathbf{t_0}}^{\mathbf{t}} \mathbf{a}(\tau)\, \mathbf{d}\tau$,
- $\mathbf{s}(\mathbf{t}) = \mathbf{s}(\mathbf{t_0}) + \displaystyle\int_{\mathbf{t_0}}^{\mathbf{t}} \mathbf{v}(\theta)\, \mathbf{d}\theta = \mathbf{s}(\mathbf{t_0}) + \int_{\mathbf{t_0}}^{\mathbf{t}} \left[\mathbf{v}(\mathbf{t_0}) + \int_{\mathbf{t_0}}^{\theta} (\mathbf{a}(\tau)\, \mathbf{d}\tau)\right] \mathbf{d}\theta$.

Podemos também definir o **espaço percorrido** entre t_0 e t como

$$\mathbf{e}(\mathbf{t_0}, \mathbf{t}) = \int_{\mathbf{t_0}}^{\mathbf{t}} |\mathbf{v}(\theta)|\, \mathbf{d}\theta\,.$$