

1 Funções de várias variáveis - 3

1.1 Classes de derivabilidade e derivadas mistas

Definição. Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ e $A \subseteq D$:

- dizemos que f é de classe \mathcal{C}^k em A ($f \in \mathcal{C}^k(A)$) se f e todas suas derivadas parciais até a ordem k existem e são contínuas em todo A .
- dizemos que f é de classe \mathcal{C}^∞ em A ($f \in \mathcal{C}^\infty(A)$) se f e todas suas derivadas parciais de todas as ordens existem e são contínuas em todo A .

Já vimos que se A é aberto e $f \in \mathcal{C}^1(A)$ então f é diferenciável em A .

Teorema (Teorema de Schwarz).

Seja A aberto e $f \in \mathcal{C}^2(A)$, então $f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}$ em A .

Corolário.

Seja A aberto e $f \in \mathcal{C}^k(A)$, então, em A , a ordem de derivação não importa para as derivadas até a ordem k .

1.2 Teorema do valor médio e Polinômio de Taylor

Lembrete Cálculo 1: Teorema do valor médio.

Seja g contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) :

então existe $c \in (a, b)$ **tal que** $g'(c) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a}$.

ou seja,

existe $c \in (a, b)$ **tal que** $g(b) = g(a) + g'(c)(b - a)$.

existe $t \in (0, 1)$ **tal que** $g(a + h) = g(a) + g'(a + th)h$.

Teorema (Teorema do valor médio para funções de várias variáveis).

Seja A aberto, $f \in \mathcal{C}^1(A)$, $\gamma(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{h}$ tal que $\gamma(t) \in A$ para todo $t \in [0, 1]$.

Aplicando a fórmula em uma variável a $g(t) = f(\gamma(t))$ obtemos:

$$\text{Então existe } c_h \in (0, 1) \text{ tal que } f(\mathbf{p} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{p}) + \nabla f(\mathbf{p} + c_h\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h} .$$

Analogamente: $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{p}) + \nabla f(\mathbf{q}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p})$ para algum \mathbf{q} no segmento entre \mathbf{p} e \mathbf{x} .

Algumas consequências:

- Seja $f \in \mathcal{C}^1(A)$ com $\nabla f \equiv 0$ em A , onde A é aberto e conexo por caminhos: **então f é constante em A .**
- Seja A aberto, $f \in \mathcal{C}^1(A)$, $\mathbf{p} + t\mathbf{h} \in A$ para todo $t \in [0, 1]$. **Então** $|f(\mathbf{p} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{p})| \leq C\|\mathbf{h}\|$, onde $C = \max\{\|\nabla f(\mathbf{p} + t\mathbf{h})\|, t \in [0, 1]\}$

Lembrete Cálculo 1: Polinômio de Taylor de ordem 1 com resto de Lagrange

Seja g contínua e 2 vezes derivável em $[a, b]$: então

existe $c \in (a, b)$ **tal que** $g(b) = g(a) + g'(a)(b - a) + \frac{1}{2}g''(c)(b - a)^2$.

existe $t \in (0, 1)$ **tal que** $g(a + h) = g(a) + g'(a)h + \frac{1}{2}g''(a + th)h^2$.

Teorema (PdT ord1 com resto de Lagrange para funções de várias variáveis).

Seja A aberto, $f \in \mathcal{C}^2(A)$, $\gamma(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{h}$ tal que $\gamma(t) \in A$ para todo $t \in [0, 1]$.

Então existe $c_h \in (0, 1)$ tal que

$$\begin{aligned} f(\mathbf{p} + \mathbf{h}) &= f(\mathbf{p}) + \nabla f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{x_i x_j}(\mathbf{p} + c_h \mathbf{h}) h_j h_i \\ &= f(\mathbf{p}) + \nabla f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{2} H_f(\mathbf{p} + c_h \mathbf{h}) \mathbf{h} \cdot \mathbf{h} \end{aligned}$$

Onde para escrever de forma mais fácil o termo de ordem 2, definimos a **Matriz Hessiana de f em \mathbf{p}** :

$$H_f(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} f_{x_1 x_1}(\mathbf{p}) & \dots & f_{x_1 x_n}(\mathbf{p}) \\ \dots & f_{x_i x_j}(\mathbf{p}) & \dots \\ f_{x_n x_1}(\mathbf{p}) & \dots & f_{x_n x_n}(\mathbf{p}) \end{bmatrix}$$

(OBS: ela é simétrica se $f \in \mathcal{C}^2(B_\delta(\mathbf{p}))$). Assim

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{x_i x_j}(\star) h_j h_i = H_f(\star) \mathbf{h} \cdot \mathbf{h}$$

Analogamente: $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{p}) + \nabla f(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) + \frac{1}{2} H_f(\mathbf{q})(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p})$
para algum \mathbf{q} no segmento entre \mathbf{p} e \mathbf{x} .

Quando $n = 2$, pondo $\mathbf{p} = (x, y)$, $\mathbf{h} = (r, s)$ podemos escrever

$$f(x+r, y+s) = f(x, y) + f_x(x, y)r + f_y(x, y)s + \\ + \frac{1}{2}f_{xx}(x+cr, y+cs)r^2 + f_{xy}(x+cr, y+cs)rs + \frac{1}{2}f_{yy}(x+cr, y+cs)s^2$$

sendo $c \in (0, 1)$ (dependendo de r, s).

1.3 Formas quadráticas

Chamamos **Forma quadrática em n variáveis** uma função na forma

$$Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x},$$

onde A é uma matriz simétrica ($n \times n$) fixada.

Dizemos

- **a forma Q (a matriz A) é definida positiva**
se $Q(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
 - **a forma Q (a matriz A) é definida negativa**
se $Q(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} < 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
 - **a forma Q (a matriz A) é semidefinida positiva**
se $Q(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ mas existe $\mathbf{z} \neq \mathbf{0} : Q(\mathbf{z}) = A\mathbf{z} \cdot \mathbf{z} = 0$
 - **a forma Q (a matriz A) é semidefinida negativa**
se $Q(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \leq 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ mas existe $\mathbf{z} \neq \mathbf{0} : Q(\mathbf{z}) = A\mathbf{z} \cdot \mathbf{z} = 0$
 - **a forma Q (a matriz A) é indefinida**
se existem $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : Q(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} > 0$ e $Q(\mathbf{y}) = A\mathbf{y} \cdot \mathbf{y} < 0$
-

Condição para $n = 2$: se $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$

- $\det(A) = ac - b^2 > 0$ implica matriz definida: positiva se $a, c > 0$, negativa se $a, c < 0$
 - $\det(A) = ac - b^2 = 0$ implica matriz semidefinida: positiva se a ou $c > 0$, negativa se a ou $c < 0$ (ambas se $a = b = c = 0$)
 - $\det(A) = ac - b^2 < 0$ implica matriz indefinida
-

Se $n > 2$ difícil. Condição necessária e suficiente para ser definida:

- $\det(A_k) > 0$ para todo $k = 1, \dots, n \iff$ matriz definida positiva.
- $(-1)^k \det(A_k) > 0$ para todo $k = 1, \dots, n \iff$ matriz definida negativa.

onde A_k é a matriz $k \times k$ com as primeiras k linhas e k colunas de A .

1.4 Máximos e Mínimos

Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ com $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{p} \in D$:

- p é **ponto de máximo global (absoluto) de f** se

$$\forall \mathbf{x} \in D \text{ vale } f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{p})$$

– $f(p)$ é **máximo global (absoluto) de f** .

- p é **ponto de máximo local de f** se

$$\exists \delta : \forall \mathbf{x} \in D \cap B_\delta(\mathbf{p}) \text{ vale } f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{p})$$

– $f(p)$ é **máximo local de f** .

- p é **ponto de mínimo global (absoluto) de f** se

$$\forall \mathbf{x} \in D \text{ vale } f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{p})$$

– $f(p)$ é **mínimo global (absoluto) de f** .

- p é **ponto de mínimo local de f** se

$$\exists \delta : \forall \mathbf{x} \in D \cap B_\delta(\mathbf{p}) \text{ vale } f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{p})$$

– $f(p)$ é **mínimo local de f** .

- p é **ponto extremal (local ou global) de f** se for ponto de máximo ou de mínimo (local ou global) de f .

- p é **ponto crítico de f** se vale $\nabla f(p) = 0$.

- p é **ponto de sela de f** se for um ponto crítico mas nem máximo nem mínimo:

$$\nabla f(\mathbf{p}) = 0 \text{ e } \forall \delta > 0 : \exists \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D \cap B_\delta(\mathbf{p}) \text{ tais que } f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{p}) > f(\mathbf{y})$$

1.5 Máximos e Mínimos interiores (livres)

Teorema (Análogo do T. de Fermat).

Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, \mathbf{p} ponto interior de D e ponto extremal

Se f é derivável em \mathbf{p} na direção $\hat{\mathbf{v}}$ **então** $D_{\hat{\mathbf{v}}}f(p) = 0$.

Se f é derivável em \mathbf{p} **então** $\nabla f(p) = 0$.

Consequências:

- *todo ponto extremal que seja ponto interior do domínio do gradiente é ponto crítico;*
- *se p é ponto interior do domínio do gradiente e $\nabla f(p) \neq 0$ então p não é ponto extremal.*

RESUMO: **Possíveis pontos extremais:**

- pontos *interiores do domínio do gradiente* que sejam *críticos*,
- pontos *onde f não é derivável*,
- ponto *na borda do domínio do gradiente*,
- pontos *onde f não é contínua*.

Teorema.

Se $f \in \mathcal{C}^2(B_\delta(\mathbf{p}))$ e $\nabla f(\mathbf{p}) = 0$ vale:

- Se $H_f(\mathbf{p})$ é indefinida **então \mathbf{p} é ponto de sela**
- Se $H_f(\mathbf{p})$ é definida positiva **então \mathbf{p} é ponto de mínimo local**
- Se $H_f(\mathbf{p})$ é definida negativa **então \mathbf{p} é ponto de máximo local**
- Se $H_f(\mathbf{p})$ é semidefinida **então nada podemos dizer**

Mais em geral, de $H_f(\mathbf{p})$ podemos saber se, perto de \mathbf{p} , f está para cima do seu plano tangente em \mathbf{p} , para baixo dele, ou o cruza.

1.6 Máximos e Mínimos na fronteira (vinculados-condicionados)

Queremos procurar os **pontos extremais de uma função regular f em um conjunto C com fronteira regular**:

- **Extremais que sejam interiores a C** : devem ser **criticos**; discussão usando **Hessiana**.
- **Extremais que sejam na fronteira de C** : devem ser **extremais para f restrita à fronteira de C** ; discussão usando a **direção do gradiente**:
 - mínimo para a restrição à fronteira e gradiente entrando em C : é mínimo
 - mínimo para a restrição à fronteira e gradiente saindo de C : não é nada
 - máximo para a restrição à fronteira e gradiente entrando em C : não é nada
 - máximo para a restrição à fronteira e gradiente saindo de C : é máximo

Método dos multiplicadores de Lagrange:

Procuro pontos extremais de f no conjunto $N = \{\mathbf{x} \in A : g(\mathbf{x}) = 0\}$, onde $f, g \in \mathcal{C}^1(A)$ e $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto.

Teorema.

Sejam $f, g \in \mathcal{C}^1(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e $N = \{\mathbf{x} \in A : g(\mathbf{x}) = 0\}$.

Se $\mathbf{p} \in N$ é ponto extremal de f no conjunto N e $\nabla g(\mathbf{p}) \neq \mathbf{0}$, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(\mathbf{p}) = \lambda \nabla g(\mathbf{p})$.

Multiplicadores de Lagrange com mais vínculos:

Procuro pontos extremais de f no conjunto $N = \{\mathbf{x} \in A : g_i(\mathbf{x}) = 0 : i = 1, \dots, k\}$, onde $f, g_i \in \mathcal{C}^1(A) : i = 1, \dots, k$ e $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto.

Teorema.

Sejam $f, g_i \in \mathcal{C}^1(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e $N = \{\mathbf{x} \in A : g_i(\mathbf{x}) = 0 : i = 1, \dots, k\}$.

Se $\mathbf{p} \in N$ é ponto extremal de f no conjunto N e os vetores $\nabla g_i(\mathbf{p}) : i = 1, \dots, k$ são linearmente independentes, então existem $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tais que $\nabla f(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{p})$.