1 Funções de várias variáveis - 1

Uma **Função(real) de várias variáveis** é uma função

$$f : D \to \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x})$$

onde $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

Valem as mesmas definições do caso de funções de uma variável (domínio, domínio natural, contradomínio, imagem, sobrejetora, injetora, bijetora, operações, composição, inversa, gráfico, função limitada, supremo, ínfimo, máximo, mínimo...) veja **aqui**)

Definição: **Conjunto de nível de f**: um conjunto da forma

$$N_y = \{\mathbf{x} \in D : \ f(\mathbf{x}) = y\},$$

para um $y \in \mathbb{R}$ fixado
(é dita **curva de nível de f** se $n = 2$, **(hiper)superfície de nível de f** se $n = 3$ ($n > 3$)).

1.1 Algumas funções típicas

- **função linear**: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$ com $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ fixado.
- **função afim**:$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}$ com $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ fixados.
- **função polinomial**: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \mathbf{x} = (x_1, .., x_n) \mapsto p(\mathbf{x})$ com p polinômio nas variáveis $x_1, .., x_2$: exemplo $p(x, y, z) = 3x^4 + 2xy^3 - xyz$.
- **funções racionais, algébricas,...**: como em cálculo 1
- **função homogênea de grau λ**: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $f(t\mathbf{x}) = t^\lambda f(\mathbf{x})$ para todos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $t > 0$:
  exemplos: $p(x, y, z) = 3x^4 + 2xy^3 - xyz^2$, $f(x) = \frac{x \sin(x/y)}{x^2+xy-y^2}$, todas as lineares, todos os polinômios homogêneos... .

Podemos também considerar uma **Função de várias variáveis a valores vetoriais**:

$$f : D \to \mathbb{R}^k : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), ..., f_k(\mathbf{x}))$$

onde $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

1.2 Limites e continuidade

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ e $\mathbf{p}$ um ponto de acumulação de D

- $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x}) = L$ significa

  $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ tal que $\mathbf{x} \in D$ *e* $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| < \delta$ implica $|f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$

- se a afirmação acima é falsa para todo $L \in \mathbb{R}$ dizemos que $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x})$ não existe

- Seja $\mathbf{p} \in D$ e de acumulação para D:

  - dizemos que f **é contínua em p**, se
  $$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{p})$$

Formulações alternativas de limite:

- $$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \text{ tal que } \mathbf{x} \in D \cap B_\delta(\mathbf{p}) \setminus \{\mathbf{p}\} \quad \text{implica } f(\mathbf{x}) \in B_\varepsilon(L)$$

- $$\forall\, Y \text{ vizinhança de } L\ \exists\, X \text{ vizinhança de } \mathbf{p} \text{ tal que}$$
  $$\mathbf{x} \in D \cap X \setminus \{\mathbf{p}\} \quad \text{implica } f(\mathbf{x}) \in Y$$

Limites infinitos:

- $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x}) = +\infty$ significa

  $\forall\, M \in \mathbb{R}\ \exists\, \delta > 0$ tal que $\mathbf{x} \in D$ *e* $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| < \delta$ implica $f(\mathbf{x}) > M$

- $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x}) = -\infty$ significa

  $\forall\, M \in \mathbb{R}\ \exists\, \delta > 0$ tal que $\mathbf{x} \in D$ *e* $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| < \delta$ implica $f(\mathbf{x}) < M$

Limites no infinito (para D não limitado):

- $\lim_{\|\mathbf{x}\|\to\infty} f(\mathbf{x}) = L$ significa

  $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, H > 0$ tal que $x \in D$ *e* $\|\mathbf{x}\| > H$ implica $|f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$

1.3 Cálculo de limites

Valem propriedades análogas ao caso em uma variável (limite de operações, da composta, unicidade, permanência do sinal, confronto: veja **aqui** e **aqui**: suficiente substituir $|\cdot|$ por $\|\cdot\|$ onde precisar)

Em particular:

Teorema (Limite da composta: forma geral).
Sejam

$$f : D_f \to \mathbb{R}^n\,, \quad g : D_g \to \mathbb{R}^k\,, \qquad Im(f) \subseteq D_g \subseteq \mathbb{R}^n,$$

onde $D_f \subseteq \mathbb{R}^h$

$$\mathbf{p} \text{ ponto de acumulação de } D_f\,, \quad \mathbf{a} \text{ ponto de acumulação de } D_g\,,$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}\,, \qquad \lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{y}) = L\,.$$

Além disso, valha pelo menos UMA entre

(a) $\mathbf{a} \in D_g$ e g contínua em $\mathbf{a}$,

(b) $\exists\, r > 0 :\ \mathbf{x} \in D_f\ e\ 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| < r \Rightarrow f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{a}\,.$

Então

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} g \circ f(\mathbf{x}) = L\,.$$

Teorema (de confronto).
Sejam $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ e seja $\mathbf{p}$ ponto de acumulação de D ($D \subseteq \mathbb{R}^n$). Se

$$\exists\, r > 0 :\ \mathbf{x} \in D\ e\ 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| < r \ \Rightarrow f(\mathbf{x}) \le g(\mathbf{x}) \le h(\mathbf{x})$$

$$\exists\ \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} h(\mathbf{x}) = L$$

então $\exists\ \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} g(\mathbf{x}) = L$

Corolário (Continuidade das composições de contínuas).
Qualquer função obtida via soma, diferença, produto, divisão composição de funções continuas, **é contínua no seu domínio natural**.

São contínuas, no seu domínio:

- projeção: $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto x_i$,
- norma: $n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto \|x_i\|$,
- polinomiais, racionais, algébricas,

Resultado útil:

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ e $\mathbf{p}$ um ponto de acumulação de D,
seja $\gamma : (0, b] \to D \setminus \{\mathbf{p}\}$ tal que $\lim_{t\to 0} \gamma(t) = \mathbf{p}$:
Se $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x}) = L$ então $\lim_{t\to 0} f(\gamma(t)) = L$

Consequências:

- se γ como acima e vale $\lim_{t\to 0} f(\gamma(t)) = L$ então $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x}) = L$ ou $\nexists$
- se para $\gamma_{1,2}$ como acima vale $\lim_{t\to 0} f(\gamma_1(t)) \neq \lim_{t\to 0} f(\gamma_2(t))$
  então $\nexists \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x})$

1.4 Teoremas sobre funções contínuas

Lembrete de Cálculo 1:

Teorema (Teorema do valor intermediário).
Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, e seja $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(a) > \gamma > f(b) \qquad \textit{ou} \qquad f(a) < \gamma < f(b)$$

então existe $c \in (a, b) : \ f(c) = \gamma$.
Em particular f assume todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$.

Teorema (Teorema de Weiestrass).
Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua,
então existem $x_1, x_2 \in [a, b] : \ f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \ \forall\, x \in [a, b]$.

Corolário.
Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua,
então

$$Im(f) = [m, M],$$

onde m, M **são, respectivamente, o mínimo e o máximo de** f.

Definições

- Um conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ é dito **compacto** quando é fechado e limitado.
- Um conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ é dito **conexo por caminhos** quando para todos $x, y \in D$ existe uma curva (contínua) $\gamma : [a, b] \to D$ tal que $\gamma(a) = x$ e $\gamma(b) = y$

Teorema (Teorema de Weiestrass em $\mathbb{R}^n$).
Seja $f : D \to \mathbb{R}$ contínua, sendo D compacto,
então existem $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D : \ f(\mathbf{x}_1) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_2) \ \forall\, \mathbf{x} \in D$.

Teorema.
Seja $f : D \to \mathbb{R}$ contínua, sendo D conexo por caminhos.
Se $c, d \in Im(f)$ **com** $c < d$**, então** $[c, d] \subseteq Im(f)$.

Corolário.
Seja $f : D \to \mathbb{R}$ contínua, sendo D compacto e conexo por caminhos,
então

$$Im(f) = [m, M],$$

onde m, M **são, respectivamente, o mínimo e o máximo de** f.