6,7,8ª Lista de Exercícios de SMA-354 Cálculo 2

Eugenio Massa

$\mathbb{R}^n$, funções a valores vetoriais, curvas

1. Dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ diga quais são fechados, abertos, limitados; em seguida calcule suas fronteiras.

   a) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < 1\right\}$;

   b) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 1, \ y \leq 2\right\}$;

   c) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = 1, \ y < 2\right\}$;

2. (!) Para cada um dos seguintes conjuntos $A \subset \mathbb{R}$, determine $int(A)$, $\overline{A}$, $int(\overline{A})$ e $\overline{int(A)}$:

   a) $A = \mathbb{Z}$;

   b) $A = \mathbb{Q} \cap \ (0,1)$;

   c) $\{-1\} \cup \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\right\}$;

   d) $A = \ (0,1] \cup \left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, ...\right\}$.

3. (!) Verifique que são fechados os seguintes conjuntos:

   a) $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{R}$

   b) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0\}$, no $\mathbb{R}^2$

4. (!) Determine o conjunto dos pontos de acumulação de:

   a) $\mathbb{Z}$ no espaço $\mathbb{R}$;

   b) $A = \mathbb{Q} \ \cap \ (0,1)$ em $\mathbb{R}$;

   c) $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}^2$;

   d) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}^2$.

5. (!) Verifique que o único ponto de acumulação de $A = \left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, ...\right\}$ é o ponto 0.

6. (!) Seja $C \subseteq \mathbb{R}^5$: $C = A \times B$, sendo $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < 1\right\}$ e $B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 1 < x \leq 2\right\}$: diga se C é aberto, se é fechado, se é limitado.

Exercícios sobre funções a valores vetoriais.

7. Seja F dada por $F(t) = (lnt, t, \sqrt{1-t^2}, t^2)$.

   a) Determine o domínio de F.

   b) Calcule $F\left(\dfrac{3}{5}\right)$

8. Sejam $\overrightarrow{F}$(t)=(t, sent, 2) e $\overrightarrow{G}$(t)=(3, t, t^2). Calcule:

   a) $\overrightarrow{F}(t) \bullet \overrightarrow{G}(t)$, b) $e^{-t}\overrightarrow{F}(t)$, c) $\overrightarrow{F}(t) - 2\overrightarrow{G}(t)$, d) $\overrightarrow{F}(t) \wedge \overrightarrow{G}(t)$

9. Calcule $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}$, onde $\overrightarrow{u}(t) = sent\,\overrightarrow{i} + cost\,\overrightarrow{j} + t\,\overrightarrow{k}$ e $\overrightarrow{v}(t) = sent\,\overrightarrow{i} + cost\,\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.

10. Calcule $\lim_{t\to t_o} \overrightarrow{F}(t)$, onde:

a) $\overrightarrow{F}(t) = \left(\dfrac{\sqrt{t}-1}{t-1}, t^2, \dfrac{t-1}{t}\right)$ e $t_o = 1$, b) $\overrightarrow{F}(t) = \left(\dfrac{\tan(3t)}{t}, \dfrac{e^{2t}-1}{t}, t^3\right)$ e $t_o = 0$

c) $\overrightarrow{F}(t) = \left(\dfrac{t^3-8}{t^2-4}, \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{t}\right)}{t-2}, 2t\right)$ e $t_o = 2$

11. Calcule $\dfrac{d\overrightarrow{F}}{dt}$ e $\dfrac{d^2\overrightarrow{F}}{dt^2}$; em seguida calcule a reta tangente ao gráfico das funções dadas, no ponto $(t_0, \overrightarrow{F}(t_0))$

a) $\overrightarrow{F}(t) = (3t^2, e^{-t}, ln(t^2+1))$, $t_0 = 0$;

b) $\overrightarrow{F}(t) = \sqrt[3]{t^2}\ \overrightarrow{i} + t^2\overrightarrow{j} + 3t\overrightarrow{k}$, $t_0 = 1$;

c) $\overrightarrow{F}(t) = sen5t\,\overrightarrow{i} + cos4t\,\overrightarrow{j} - e^{-2t}\overrightarrow{k}$, $t_0 = \pi/2$.

12. Calcule:

a) $\int_0^1 [t\,\overrightarrow{i} + e^t\overrightarrow{j}]dt$, b) $\int_{-1}^1 \left[sen3t\,\overrightarrow{i} + \dfrac{1}{1+t^2}\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}\right]dt$, c) $\int_1^2 [3\,\overrightarrow{i} + 2\,\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}]dt$

13. Sejam $\overrightarrow{F}(t) = t\,\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + e^t\overrightarrow{k}$ e $\overrightarrow{G}(t) = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$. Calcule:

a) $\int_0^1 [\overrightarrow{F}(t) \wedge \overrightarrow{G}(t)]dt$, b) $\int_0^1 [\overrightarrow{F}(t) \bullet \overrightarrow{G}(t)]dt$

14. (!*) Sejam $\overrightarrow{F} : A \to \mathbb{R}^3$ e $\overrightarrow{G} : A \to \mathbb{R}^3$ Suponha $\lim_{t\to t_o} \overrightarrow{F}(t) = \overrightarrow{0}$ e que $\|\overrightarrow{G}(t)\| \leq M$ para todo $t \in \mathbb{A}$, onde $M > 0$ é um real fixo. Prove que:

a) $\lim_{t\to t_o} \overrightarrow{F}(t) \bullet \overrightarrow{G}(t) = 0$, b) $\lim_{t\to t_o} \overrightarrow{F}(t) \wedge \overrightarrow{G}(t) = \overrightarrow{0}$

15. (!*) Seja $\overrightarrow{F} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ contínua. Prove que existe $M > 0$ tal que $\| \overrightarrow{F}(t) \| \leq M$ em $[a,b]$.

16. Seja $\overrightarrow{F} : I \to \mathbb{R}^3$, I intervalo, derivável até a segunda ordem em I. Suponha que exista um número real λ tal que, para todo t em I, $\dfrac{d^2\overrightarrow{F}(t)}{dt^2} = \lambda\overrightarrow{F}(t)$. Prove que $\overrightarrow{F}(t) \wedge \dfrac{d\overrightarrow{F}(t)}{dt}$ é constante em I.

17. Seja $\overrightarrow{r}$ definida em $\mathbb{R}$, com valores em $\mathbb{R}^3$, e derivável até a segunda ordem. Prove que se $\overrightarrow{r}(t) \wedge \dfrac{d\overrightarrow{r}(t)}{dt}$ for constante em $\mathbb{R}$, então $\overrightarrow{r}(t) \wedge \dfrac{d^2\overrightarrow{r}(t)}{dt^2} = \overrightarrow{0}$ em $\mathbb{R}$.

Exercícios sobre curvas.

18. Desenhe a imagem:

a) $F(t) = (1, t)$, b) $F(t) = (2t-1, t+2)$, c) $F(t) = (t, t^3)$, d) $F(t) = (t^2, t)$,

e) $F(t) = (t^2, t^4)$, f) $F(t) = (cost, 2sent)$, g) $F(t) = (sent, sent)$,

h) $F(t) = (sent, sen^2t)$, i) $F(t) = (e^t cost, e^t sent)$, $t \geq 0$

19. Desenhe a imagem:

a) $F(t) = (1, t, 1)$, $t \in \mathbb{R}$, b) $F(t) = (1, 1, t)$, $t \geq 0$, c) $F(t) = (t, t, 1)$, $t \geq 0$,

d) $F(t) = (cost, sent, 2)$, e) $F(t) = (t, t, 1 + sent)$, $t \geq 0$, f) $F(t) = \left(1, 1, \dfrac{1}{t}\right)$, $t > 0$,

g) $F(t) = (cost, sent, e^{-t})$, $t \geq 0$, h) $F(t) = (1 + sent, 1 + sent, cost)$, $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$

20. Dizemos que uma curva $\delta : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$, com derivada contínua, está parametrizada pelo comprimento de arco se $\| \delta'(s) \| = 1$, para todo $s \in [\alpha, \beta]$. Verifique que cada uma das curvas abaixo está parametrizada pelo comprimento de arco.

a) $\delta(s) = (cos(s), sen(s))$, $s \geq 0$

b) $\delta(s) = \left(Rcos(\dfrac{s}{R}), Rsen(\dfrac{s}{R})\right)$, $s \geq 0$, onde $R > 0$ é um real fixo

c) $\delta(s) = \left(\dfrac{s}{\sqrt{5}}, \dfrac{2s}{\sqrt{5}}\right)$, $s \geq 0$

21. Esboce o traço da curva C determinada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$, sendo:

(a) $\mathbf{r}(t) = 3\,t\,\mathbf{i} + (1 - 9\,t^2)\,\mathbf{j}, \quad t \in \mathbb{R}$	(b) $\mathbf{r}(t)(1 - t^2)\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j}, \quad t \in \mathbb{R}$
(c) $\mathbf{r}(t) = (2 + \cos\,t)\mathbf{i} - (3 - \sin\,t)\,\mathbf{j},\ t \in [0, 2\,\pi]$	(d) $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} - 3\,\sin\,t\,\mathbf{j} + 3\,\cos\,t\,\mathbf{k}, \quad t \geq 0$
(e) $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + 4\,\cos\,t\,\mathbf{j} + 9\,\sin\,t\,\mathbf{k}, \quad t \geq 0$	(f) $\mathbf{r}(t) = \tan\,t\,\mathbf{i} + \sec\,t\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}, \quad \lvert t\rvert \leq \pi/2$

22. Considere a curva C parametrizada por $x = a\,\sin\alpha\,\sin\,t,\ y = b\,\cos\alpha\,\sin\,t,\ z = c\,\cos\,t$, em que a, b, c, α são constantes fixadas.
(a) Mostre que C está contida no elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.
(b) Mostre que C também está contida em um plano que contém o eixo z.
(c) Faça um esboço da curva C

23. Considere a curva C parametrizada por $x = a\,e^{\omega\,t}\,\cos\,t,\ y = a\,e^{\omega\,t}\,\sin\,t,\ z = b\,e^{\omega\,t}$, em que a, b, ω são constantes fixadas.
(a) Mostre que C está contida no cone $a^2\,z^2 = b^2\,(x^2 + y^2)$.
(b) Faça um esboço da curva C para $a = b = 4$ e $\omega = -1$.

24. A posição de uma partícula é descrita pela função vetorial $\mathbf{r}(t) = 2\cos\,2t\,\mathbf{i} + 3\cos\,t\,\mathbf{j}$.
(a) Mostre que a trajetória está sobre a parábola $4y^2 - 9x = 18$.
(b) Desenhe a trajetória.
(c) Qual é o vetor aceleração nos instantes de velocidade zero?
(d) Desenhe estes vetores.

25. Considere a função vetorial $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + (4t^2 - t^4)\,\mathbf{j}$:
(a) Esboce a curva determinada pelas componentes de $\mathbf{r}(t)$.
(b) Calcule $\mathbf{r}'(t)$ e $\mathbf{r}''(t)$.
(c) Esboce os vetores correspondentes a $\mathbf{r}'(t)$ e $\mathbf{r}''(t)$.

26. Uma curva tem a propriedade: o vetor posição $\mathbf{r}(t)$ é sempre perpendicular ao vetor tangente $\mathbf{r}'(t)$. Mostre que a curva está sobre uma superfície esférica com centro na origem.

27. Encontre equações paramétricas da reta tangente a C em P, nos seguintes casos:

(a) $C : \begin{cases} x = 2\,t^2 - 1 \\ y = -5\,t^2 + 3, \quad P = (1, -2, 10) \\ z = 8\,t + 2 \end{cases}$ $\qquad (b)$ $C : \begin{cases} x = e^t \\ y = t\,e^t, \quad P = (1, 0, 4) \\ z = t^2 + 4 \end{cases}$

(c) $C : \mathbf{r}(t) = e^t\,\mathbf{i} + t\,\sin\,t\,\mathbf{j} + t\,\cos\,t\,\mathbf{k},\ P = (1, 0, 0)$ $\quad (d)$ $C : \mathbf{r}(t) = 3\,t^2\,\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{j} + 6\,t\,\mathbf{k},\ P = (3, 1, 6)$

28. Uma *hélice* é uma curva cuja tangente faz um ângulo constante com um vetor unitário $\mathbf{u}$. Mostre que a curva $C : x = 3\,t - t^3,\ y = 3\,t^2,\ z = 3\,t + t^3,\ t \in \mathbb{R}$, é uma hélice, determinando um vetor apropriado $\mathbf{u}$.

29. Encontre uma possível parametrização para as seguintes curvas:
a) parabola $y = x^2$ em $\mathbb{R}^2$ percorrida da direita à esquerda;
b) parabola $x = y^2$ em $\mathbb{R}^2$ percorrida de baixo para cima;
c) elipse $x^2 + 4(y - 1)^2 = 1$ em $\mathbb{R}^2$, em sentido horário
d) quadrado em $\mathbb{R}^2$ de lados paralelos aos eixos e vértices em $(0, 0)$ e $(1, 2)$, sentido anti-horário.
e) em $\mathbb{R}^3$, o circulo de raio 1 e centro $(0, 0, 0)$, no plano $x = y$.

Exercícios sobre movimento di partículas.

30. Ache a força que atua sobre uma partícula de massa m que se desloca segundo a lei $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k}$.

31. Dispara-se um projétil com velocidade inicial de 500 m/s e ângulo de inclinação de 30^o. Determine: (neste exercício e nos próximos, considere apenas a aceleração de gravidade, aproximando-a com $g = 10m/s^2$)
    (a) A velocidade no instante t.
    (b) A altura máxima atingida.
    (c) O alcance.
    (d) A velocidade com que o projétil atinge o solo.

32. Lança-se horizontalmente um projétil com velocidade de 600m/s de uma altura de 500m acima do nível do solo. Quando e onde o projétil atingirá o solo?.

33. Um jogador de futebol lança uma bola a uma distância de 30 metros. Sabendo que a bola é liberada com um ângulo de $\pi/4$ com a horizontal, encontre sua velocidade inicial.

34. Um objeto de massa m desloca-se segundo a lei $\mathbf{r}(t) = a\cos(wt)\,\mathbf{i} + \sin(wt)\,\mathbf{j}$. Ache a força que atua sobre este objeto. Faça uma ilustração da situação trajetória-força.

Gabarito

Exercício 1 b) nem aberto nem fechado (por que?), não limitado, $\partial C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = 1, \ y \leq 2\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 1, \ y = 2\}$
Exercício 2 b) $int(\overline{A}) = (0,1)$, $\overline{int(A)} = \emptyset$; c) $int(A) = \emptyset$, $\overline{A} = A \cup \{0\}$, ...
Exercício 4 a) $\emptyset$, d) $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$
Exercício 6 sugestão: os pontos $(0,1,1,1,1)$ e $(0,0,2,1,1)$ são de fronteira? pertencem a C? Se $M > 0$ existe um posto de C cuja norma seja maior que M?

Exercício 11 b) reta $(x,y,z) = (1 + 2(t-1)/3, -1 + 2t, 3t)$.

Exercício 27 b) $\mathbf{r}(t) = (1+t, t, 4)$
Exercício 31 b) $3125m$, c) $12500\sqrt{3}m$, d) $500m/s$