

3ª Lista de Exercícios de SMA-354 Cálculo 2

Eugenio Massa

Cálculo de integrais 2

Exercício 1 Calcule

(a) $\int \sin^3 x \sqrt{\cos x} dx$ (b) $\int_0^\pi \sin^2 t \cos^5 \frac{t}{2} dt$ (c) $\int \sin^2 t \cos^2 t dt$ (d) $\int \frac{\sec^4 t}{\tan t} dt$
 (e) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 x \sec x dx$

Exercício 2 Calcule

(a) $\int_0^3 \frac{x^3}{\sqrt{9+x^2}} dx$ (b) $\int_2^6 \frac{dx}{x^2 \sqrt{4+x^2}}$ (c) $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4-x^2}}$ (d) $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4} dx$

Exercício 3 Calcule

(a) $\int \frac{x^3+2}{x^2-x-6} dx$ (b) $\int \frac{x+5}{x^3-2x^2+x} dx$ (c) $\int \frac{x^2-x+5}{x(x^2+1)} dx$ (d) $\int \frac{2x^2+x+7}{(x^2+4)^2} dx$
 (e) $\int \frac{x^2+3}{x^2-9} dx$ (f) $\int \frac{dx}{x^3-1}$ (g) $\int \frac{x+3}{x(x-3)(x-4)} dx$ (h) $\int \frac{3}{x^3-16x} dx$
 (i) $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2-2x} dx$ (l) $\int \frac{5}{(x^2-1)(x^2-9)} dx$ (m) $\int \frac{x^4+2x^2-8x+4}{x^3-8} dx$

Exercício 4 Calcule

(a) $\int \frac{\sqrt{x}}{x^2-1} dx$ (b) $\int_0^1 x^2 \arcsin x dx$ (c) $\int_0^\pi \frac{\sin x dx}{4+\cos^2 x}$
 (d) $\int \frac{dx}{1-\sin x + \cos x}$ Dica: Faça $u = \tan(x/2)$ e use as identidades $\sin x = 2\sin(x/2)\cos(x/2)$ e $\cos x = \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2)$
 (e) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$ (f) $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^2-4}}$ (g) $\int \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2}}$

GABARITO

Exercício 1 (a) $\frac{2}{7}(\cos x)^{7/2} - \frac{2}{3}(\cos x)^{3/2} + C$ (b) $\frac{16}{115}$ (c) $\frac{1}{8}t - \frac{1}{32}\sin 4t + C$ (d) $\frac{1}{2}\tan^2 t + \ln|\tan t| + C$
 (e) $\sqrt{3} + \ln(2 - \sqrt{3})/2$

Exercício 2 (a) $9(2 - \sqrt{2})$ (b) $\frac{1}{12}(3\sqrt{2} - \sqrt{10})$ (c) $-\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x} + C$ (d) $\frac{(x^2-9)^{3/2}}{27x^3}$

Exercício 3 (a) $\frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{29}{5}\ln|x-3| + \frac{6}{5}\ln|x+2| + C$ (b) $5\ln\left|\frac{x}{x-1}\right| - \frac{6}{x-1} + C$

(c) $5\ln x - 2\ln(x^2+1) - \arctan x + C$ (d) $\frac{15}{16}\arctan \frac{x}{2} - \frac{x+4}{8(x^2+4)} + C$
 (e) $x + 2\ln|x-3| - 2\ln|x+3| + C$

Exercício 4 (a) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right| + \arctan \sqrt{x} + C$ (b) $\frac{\pi}{6} - \frac{2}{9}$ (c) $\arctan \frac{1}{2}$ (d) $-\ln\left|1 - \tan \frac{x}{2}\right| + C$

(e) $\frac{3}{10}(x+1)^{2/3}(2x-3) + C$ (f) $\frac{1}{4}x\sqrt{x^2-4}(x^2+6) + 6\ln|x+\sqrt{x^2-4}| + C$ (g) $\arcsin \frac{x-3}{3} + C$

Integração de funções racionais

Considere

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx$$

onde N e D são polinômios.

- **passo 1:** reduza ao caso $\text{grau}(N) < \text{grau}(D)$: para isso use divisão de polinômios: de fato existe uma única escolha de polinômios Q, R com $\text{grau}(R) < \text{grau}(D)$ tais que

$$N(x) = Q(x)D(x) + R(x).$$

Com isso,

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx = \int \left(Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)} \right) dx$$

- **passo 2:** (a partir de agora assumamos $\text{grau}(N) < \text{grau}(D)$) Fatore o denominador: é sempre possível fatorar o polinômio $D(x)$ como produto de termos lineares $(x - r)$ e quadráticos irredutíveis $x^2 + 2\rho x + \sigma$ onde $\Delta = \rho^2 - \sigma < 0$:

$$D(x) = \alpha(x - r_1)^{k_1} \cdot (x - r_2)^{k_2} \dots (x^2 + 2\rho_1 x + \sigma_1)^{h_1} \cdot (x^2 + 2\rho_2 x + \sigma_2)^{h_2} \dots \quad (1)$$

- **passo 3:** reescreva a função racional $N(x)/D(x)$ como soma de frações simples: se D é fatorado como em (1), então podemos escrever de maneira única

$$\begin{aligned} \frac{N(x)}{D(x)} = & \frac{A_{1,1}}{(x - r_1)} + \frac{A_{1,2}}{(x - r_1)^2} + \dots + \frac{A_{1,k_1}}{(x - r_1)^{k_1}} + \\ & + \frac{A_{2,1}}{(x - r_2)} + \frac{A_{2,2}}{(x - r_2)^2} + \dots + \frac{A_{2,k_2}}{(x - r_2)^{k_2}} + \\ & + \dots + \\ & + \frac{B_{1,1}x + C_{1,1}}{(x^2 + 2\rho_1 x + \sigma_1)} + \frac{B_{1,2}x + C_{1,2}}{(x^2 + 2\rho_1 x + \sigma_1)^2} + \dots + \frac{B_{1,h_1}x + C_{1,h_1}}{(x^2 + 2\rho_1 x + \sigma_1)^{h_1}} + \\ & + \frac{B_{2,1}x + C_{2,1}}{(x^2 + 2\rho_2 x + \sigma_2)} + \frac{B_{2,2}x + C_{2,2}}{(x^2 + 2\rho_2 x + \sigma_2)^2} + \dots + \frac{B_{2,h_2}x + C_{2,h_2}}{(x^2 + 2\rho_2 x + \sigma_2)^{h_2}} + \\ & + \dots + \end{aligned}$$

- **passo 4:** integrar cada pedaço (lembre que integral indefinida faz sentido depois de fixar um intervalo contido no domínio da função):

— $\int \frac{A}{x - r} = A \ln|x - r| + k : k \in \mathbb{R}.$

— $\int \frac{A}{(x - r)^n} = \frac{A}{(1 - n)(x - r)^{n-1}} + k : k \in \mathbb{R} \quad (n > 1).$

— $\int \frac{Bx + C}{x^2 + 2\rho x + \sigma} \quad (\sigma - \rho^2 > 0) :$

Primeiro passo: reduzir o numerador a apenas uma constante fazendo aparecer a derivada do denominador: como

$$Bx + C = \frac{B}{2}(2x + 2\rho) + C - B\rho$$

temos

$$\begin{aligned}\int \frac{Bx + C}{x^2 + 2\rho x + \sigma} &= \frac{B}{2} \int \frac{2x + 2\rho}{x^2 + 2\rho x + \sigma} + (C - B\rho) \int \frac{1}{x^2 + 2\rho x + \sigma} \\ &= \frac{B}{2} \ln(x^2 + 2\rho x + \sigma) + (C - B\rho) \int \frac{1}{x^2 + 2\rho x + \sigma}\end{aligned}$$

(observe que $x^2 + 2\rho x + \sigma > 0$).

Para o segundo termo nosso objetivo é usar a integral conhecida $\int \frac{dt}{1+t^2} = \text{atg}(t)$: observe que $x^2 + 2\rho x + \sigma = x^2 + 2\rho x + \rho^2 + \sigma - \rho^2 = (x + \rho)^2 + \sigma - \rho^2$ e que $\sigma - \rho^2 > 0$, assim pode ser escrito como $\left(\sqrt{\sigma - \rho^2}\right)^2$.

logo

$$\int \frac{1}{x^2 + 2\rho x + \sigma} = \int \frac{1/(\sigma - \rho^2)}{1 + \left(\frac{x+\rho}{\sqrt{\sigma-\rho^2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{\sigma - \rho^2}} \int \frac{1/\sqrt{\sigma - \rho^2}}{1 + \left(\frac{x+\rho}{\sqrt{\sigma-\rho^2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{\sigma - \rho^2}} \text{atg}\left(\frac{x + \rho}{\sqrt{\sigma - \rho^2}}\right).$$

Em conclusão,

$$\int \frac{Bx + C}{x^2 + 2\rho x + \sigma} = \frac{B}{2} \ln(x^2 + 2\rho x + \sigma) + \frac{C - B\rho}{\sqrt{\sigma - \rho^2}} \text{atg}\left(\frac{x + \rho}{\sqrt{\sigma - \rho^2}}\right) + k : k \in \mathbb{R}$$

—

$$\int \frac{Bx + C}{(x^2 + 2\rho x + \sigma)^n} \quad (\sigma - \rho^2 > 0, n > 1) :$$

neste caso podemos fazer como antes obtendo

$$\begin{aligned}\int \frac{Bx + C}{(x^2 + 2\rho x + \sigma)^n} &= \frac{B}{2} \int \frac{2x + 2\rho}{(x^2 + 2\rho x + \sigma)^n} + (C - B\rho) \int \frac{1}{(x^2 + 2\rho x + \sigma)^n} \\ &= \frac{B}{2} \frac{1}{(1 - n)(x^2 + 2\rho x + \sigma)^{n-1}} + (C - B\rho) \int \frac{1}{(x^2 + 2\rho x + \sigma)^n}\end{aligned}$$

e ainda

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2 + 2\rho x + \sigma)^n} &= \int \frac{1/(\sigma - \rho^2)^n}{\left(1 + \left(\frac{x+\rho}{\sqrt{\sigma-\rho^2}}\right)^2\right)^n} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sigma - \rho^2}^{2n-1}} \int \frac{1/\sqrt{\sigma - \rho^2}}{\left(1 + \left(\frac{x+\rho}{\sqrt{\sigma-\rho^2}}\right)^2\right)^n} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sigma - \rho^2}^{2n-1}} \int \frac{1}{(1 + t^2)^n} dt\end{aligned}$$

sendo $t = \frac{x+\rho}{\sqrt{\sigma-\rho^2}}$.

A última integral pode ser calculada iterativamente desta forma:

$$\int \frac{1}{(1 + t^2)^n} = \int \frac{1 + t^2 - t^2}{(1 + t^2)^n} = \int \frac{1}{(1 + t^2)^{n-1}} - \int t \frac{t}{(1 + t^2)^n}$$

e, ainda integrando por partes,

$$\int t \frac{t}{(1 + t^2)^n} = \int t \frac{1}{2} \frac{2t}{(1 + t^2)^n} = t \frac{1/2}{(1 - n)(1 + t^2)^{n-1}} - \int \frac{1/2}{(1 - n)(1 + t^2)^{n-1}},$$

isto é,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(1+t^2)^n} &= -t \frac{1/2}{(1-n)(1+t^2)^{n-1}} + \left(1 + \frac{1}{2-2n}\right) \int \frac{1}{(1+t^2)^{n-1}} \\ &= \frac{t}{2} \frac{1}{(n-1)(1+t^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{1}{(1+t^2)^{n-1}} : \end{aligned}$$

depois de $n - 1$ iterações o expoente de $(1 + t^2)$ é 1 e sabemos integrar.

Por exemplo,

$$\int \frac{1}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{t}{1+t^2} + atg(t) \right) + k : k \in \mathbb{R}$$

- Técnica alternativa: também podemos sempre escrever

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{A_{1,1}}{(x-r_1)} + \frac{A_{2,1}}{(x-r_2)} + \dots + \frac{B_{1,1}x + C_{1,1}}{(x^2 + 2\rho_1x + \sigma_1)} + \frac{B_{2,1}x + C_{2,1}}{(x^2 + 2\rho_2x + \sigma_2)} + \dots + \left(\frac{F(x)}{G(x)} \right)'$$

onde

$$G(x) = (x - r_1)^{k_1-1} \cdot (x - r_2)^{k_2-1} \dots \dots (x^2 + 2\rho_1x + \sigma_1)^{h_1-1} \cdot (x^2 + 2\rho_2x + \sigma_2)^{h_2-1} \dots \dots$$

e $F(x)$ é um polinômio incógnito com grau(F) < grau(G). Feito isso a integração é imediata.

Resumindo, a primitiva de uma qualquer função racional é sempre calculável: é uma combinação de funções racionais, logaritmos de polinômios e arcotangentes de polinômios.