13,14,15ª Lista de Exercícios de SMA-354 Cálculo 2

Eugenio Massa

Diferenciabilidade - 2

NOTA: quando for pedida uma aproximação entende-se a aproximação linear (isto é, aproximar $f(x)$ por $f(p) + df_p(x-p)$)

1. Seja $z = \sqrt{x} + y^{\frac{1}{3}}$. Calcule o gradiente e a diferencial de z no ponto $(1, 8)$.

2. Sejam $f(x, y) = y - x^2$ e $\gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen}^2 t)$.

   a) Verifique que a imagem de γ está contida na curva de nível $y - x^2 = 0$.

   b) Desenhe a imagem de γ.

   c) Verifique que para todo t, $\gamma'(t) \cdot \nabla f(\gamma(t)) = 0$.

3. **(!!)** Sendo $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

   a) Mostre que f é contínua em $\mathbb{R}^2$;
   b) Calcular $f_x(x, y)$ e$f_y(x, y)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - (0, 0)$;
   c) Calcular $f_x(0, 0)$ e $f_y(0, 0)$;
   d) Mostre que f_x e f_y são contínuas em $\mathbb{R}^2$;
   e) Calcule f_{xy} e f_{yx} para $(x, y) \neq (0, 0)$;
   f) Verifique que $f_{yx}(0, 0) \neq f_{xy}(0, 0)$. Há alguma contradição disto com a teoria? Justifique.

4. Sejam $z(x, y) = x^2y$, $x(t) = e^{t^2}$ e $y(t) = 2t + 1$. Calcule $\dfrac{d}{dt} z(\, x(t), y(t)\,)$.

5. Sejam $z(x, y) = x^2e^y$, $x(u, w) = u+w$ e $y(u, w) = 2uw$. Calcule $\dfrac{\partial}{\partial u}[z(\, x(u, w), y(u, w)\,)]$ e $\dfrac{\partial}{\partial w}[z(\, x(u, w), y(u, w)\,)]$.

6. Seja $F(t) = f(e^{t^2}, \sin t)$, onde $f(x, y)$ é uma função dada, diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

   a) Calcule $F'(t)$ em termos das derivadas parciais de f.

   b) Calcule $F'(0)$ supondo $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 5$.

7. Seja $g(t) = f(3t, 2t^2 - 1)$.

   a) Expresse $g'(t)$ em termos das derivadas parciais de f.

   b) Calcule $g'(0)$ admitindo $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, -1) = \dfrac{1}{3}$.

8. Considere a função $g(t) = f(a + ht, b + kt)$, com a, b, h e k constantes. Supondo $f(x, y)$ de classe C^2 num aberto de $\mathbb{R}^2$. Verifique que $g''(t) = h^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2hk\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + k^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$.

9. Determine o gradiente ∇f e a Hessiana H_f da função dada, em volta do ponto (x_0, y_0) dado.

   a) $f(x, y) = e^{x+5y}$ e $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

   b) $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 + 4y$ e $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

   c) $f(x, y) = \sin(3x + 4y)$ e $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

10. **(*)** Seja $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + m$ (a, b, c, d, e, m, constantes) e seja (x_0, y_0) um ponto tal que $\nabla f(x_0, y_0) = (0,0)$.
a) Prove que, para todo (h,k),

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = ah^2 + bhk + ck^2.$$

b) Prove que se $a > 0$ e $b^2 - 4ac < 0$, então

$$f(x_0 + h, y_0 + k) > f(x_0, y_0)$$

para todo $(h,k) \neq (0,0)$. Como é o gráfico de f?
c) Prove que se $b^2 - 4ac > 0$, então existem (h_1, k_1) e (h_2, k_2) tais que

$$f(x_0 + h_1, y_0 + k_1) > f(x_0, y_0) > f(x_0 + h_2, y_0 + k_2)\,.$$

Como é o gráfico de f?

11. Considere as formas quadráticas $q(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ geradas pelas seguintes matrizis, e diga se são indefinidas, definidas ou semidefinidas (positivas ou negativas):
$a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ $b)\ A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ $c)\ A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ $d)\ A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$
$e)\ A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $f)\ A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $g)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $h)\ A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

Lembrete:

$$det\left(\begin{bmatrix} a \end{bmatrix}\right) = a, \qquad det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\right) = ac - b^2, \qquad det\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}\right) = adf + 2bec - c^2d - b^2f - e^2a.$$

Gabarito

Exercício 6 b) $F'(0) = 5$
Exercício 11 a) def pos, b) indef, c) indef, d) semidef neg, e) def pos, f,g) indef, h) semidef neg