12ª Lista de Exercícios de SMA-354 Cálculo 2

Eugenio Massa

Diferenciabilidade

1. Calcule as derivadas parciais em todo o domínio, em seguida mostre, usando a definição de difenciabilidade, que as funções dadas são diferenciáveis em $(0,0)$ e em $(1,1)$.

   a) $f(x,y) = xy$, b) $f(x,y) = x+y$, c) $f(x,y) = x^2y^2$

   d) $f(x,y) = \dfrac{1}{xy}$, e) $f(x,y) = \dfrac{1}{x+y}$, f) $f(x,y) = x^2+y^2$

2. Em cada um dos casos abaixo, verifique se a função dada é diferenciável na origem:

   (a) $g(x,y) = \sin(x^2+y^2)$ (b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2+y^4}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ (d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

3. As funções dadas são diferenciáveis? Justifique oportunamente.

   a) $f(x,y) = \ln(\sqrt{1+x^2+y^2})$, b) $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$, c) $f(x,y) = \ln(1+x^2+y^2)$,
   d) $f(x,y) = \sin(\sqrt{1+x^2+y^2})$, e) $f(x,y) = \sin(\sqrt{x^2+y^2})$, f) $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$,

4. Calcule a diferencial.

   a) $z = x^3y^2$, b) $z = x \text{ arctg } (x+2y)$, c) $z = \text{sen } xy$

   d) $u = e^{s^2-t^2}$, e) $t = \ln(1+p^2+v^2)$, f) $x = \text{arcsen } uv$

5. Determine o conjunto dos pontos em que a função dada é diferenciável. Justifique.

   a) $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$, se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$,

   b) $f(x,y) = \dfrac{x^y}{x^2+y^2}$, se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$.

6. Determine as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico da função dada, no ponto dado.

   a) $f(x,y) = 2x^2y$ em $(1,1,f(1,1))$, b) $f(x,y) = x^2+y^2$ em $(0,1,f(0,1))$

   c) $f(x,y) = 3x^3y - xy$ em $(1,-1,f(1,-1))$, d) $f(x,y) = xe^{x^2-y^2}$ em $(2,2,f(2,2))$

   e) $f(x,y) = \text{arctg } (x-2y)$ em $\left(2, \dfrac{1}{2}, f\left(2, \dfrac{1}{2}\right)\right)$, f) $f(x,y) = xy$ em $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, f\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)\right)$

7. Determine o plano que passa pelos pontos $(1,2,2)$ e $(-1,1,1)$ e que seja tangente ao gráfico de $f(x,y) = xy$.

8. $z = 2x+y$ é a equação do plano tangente ao gráfico de $f(x,y)$ no ponto $(1,1,3)$. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1)$.

9. $2x+y+3z = 6$ é a equação do plano tangente ao gráfico de $f(x,y)$ no ponto $(1,1,1)$.

   a) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1)$.

   b) Determine a equação da reta normal no ponto $(1,1,1)$.

10. Determine o plano que seja paralelo ao plano $z = 2x + 3y$ e tangente ao gráfico de $f(x, y) = x^2 + xy$.

11. Determine os planos que sejam tangentes ao gráfico de $f(x, y) = x^2 + y^2$ e que contenham a intersecção dos planos $x + y + z = 3$ e $z = 0$.

12. Quais os pontos do hiperbolóide $x^2 - 2y^2 - 4z^2 = 16$ em que o plano tangente é paralelo ao plano $4x - 2y + 4z = 5$?

13. Determinar a equação do plano tangente ao elipsóide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 36$ no ponto (1,2,3).

14. Determine uma equação do plano tangente e uma equação da reta normal à superfície dada no ponto indicado:
    (a) $z = (x^2 + y^2)^2$, $P = (1, 2, 25)$
    (b) $z = 4xy$, $P = (4, 1/4, 4)$
    (c) $z = \sin x + \sin 2y + \sin 3(x + y)$, $P = (0, 0, 0)$
    (d) $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, $P = (4, 4, \pi/4)$

15. Calcule a derivada direcional de f no ponto P na direção de P a Q. Calcule também a direção segundo a qual f cresce mais rapidamente, bem como essa taxa de crescimento:
    (a) $f(x, y) = x^2\, e^{-2\,y}$, $P = (2, 0)$, $Q = (-3, 1)$
    (b) $f(x, y) = \sin(2\,x - y)$, $P = (-\pi/2, \pi/6)$, $Q = (0, 0)$
    (c) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $P = (-2, 3, 1)$, $Q = (0, -5, 4)$

16. Uma chapa metálica aquecida está situada em um plano $x\,y$ de tal modo que a temperatura $T(x, y)$ em um ponto $P = (x, y)$ é inversamente propocional à distância de P à origem. Sabendo que a temperatura em $P_0 = (3, 4)$ é $100^\circ\, C$, determine a taxa de variação de T em P_0 na direção do vetor $\mathbf{i} + \mathbf{j}$. A partir de P_0, em que direção T cresce mais rapidamente? Em que direção a taxa de variação é nula?

17. Considere a função $f(x, y) = xg(x^2 - y^2)$, onde $g(u)$ é uma função derivável de uma variável. Mostre que o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(a, a, f(a, a))$ passa pela origem.

18. A função $z = z(x, y)$ é diferenciável e dada implicitamente pela equação $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$. Mostre que $\dfrac{x_0 x}{a^2} + \dfrac{y_0 y}{b^2} + \dfrac{z_0 z}{c^2} = 1$ é a equação do plano tangente no ponto (x_0, y_0, z_0), $z_0 \neq 0$.

19. **(*)** Seja $z = f(x, y)$ diferenciável em (x_0, y_0). Seja S a função afim dada por $S(x, y) = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c$. Suponha que

$$f(x, y) = S(x, y) + E(x, y) \qquad \text{com} \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{E(x, y)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} = 0.$$

Conclua que $a = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $b = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ e $c = f(x_0, y_0)$.

20. Justifique que f é diferenciável em todos os pontos de seu domínio, sendo:

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

21. **(!!)** Considere a função:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3 + xy(x+y)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) Calcule $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ para todo $(x, y) \neq (0, 0)$.
b) Calcule o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 1, f(1, 1))$ (se existir).

c) Calcule a diferencial de f no ponto $p = (1, 1)$ (se existir).

d) Calcule $D_v f(1, 1)$, sendo $v = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

e) Calcule $f_x(0, 0)$ e $f_y(0, 0)$.

f) f é diferenciável em $(0, 0)$? Justifique.

g) Calcule $D_v f(0, 0)$, sendo $v = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Gabarito

Exercício 3 só a (e) não é: por que?
Exercício 4 c) $df(x, y) : (h, k) \mapsto y\cos(x, y)h + x\cos(xy)k$
Exercício 6 a) $\pi(x, y) = 2 + 4(x - 1) + 2(y - 1)$
Exercício 7 $z = y$ ou $z = 2x - 3y + 6$