# $\boxed{\text{9ª Lista de Exercícios de SMA-332- Cálculo II}}$

*Eugenio Massa*

1. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dadas por

$$f(x, y) = (e^{x+2y}, \sin(y + 2x)) \quad \text{e} \quad g(u, v, w) = (w, 2v - u).$$

   a) Encontre as matrizes jacobianas de $f$ e $g$.

   b) Encontre a matriz jacobiana da composta $h(u, v, w) = f(g(u, v, w))$.

2. Sejam $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dadas por

$$f(x, y, z) = (x^2 + z, 2x + y) \quad \text{e} \quad g(u, v, w) = (w, \sin v, e^u).$$

   a) Encontre as matrizes jacobianas de $f$ e $g$.

   b) Encontre a matriz jacobiana da composta $h(u, v, w) = f(g(u, v, w))$.

3. Considere a transformação $T(x, y) = (2x, y)$. Qual a imagem círculo $x^2 + y^2 = 1$ pela transformação $T$? Faça um esboço da imagem.

4. Considere a transformação $T(x, y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$ definida para todo $(x, y) \neq (0, 0)$.

   a) Mostre que $T$ leva círculos centrados na origem de raio $r$ em círculos centrados na origem de raio $1/r$.

   b) Mostre que $T$ leva a semi-reta $(x, y) = t(x_0, y_0),\ t > 0,\ (x_0, y_0) \neq (0, 0)$ nela mesma.

   c) Mostre que a inversa de $T$ é a própria $T$.

5. Considere a função $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2$ e seja $\gamma(t) = (x(t), y(t), y(t))$ uma curva diferenciável qualquer, com imagem contida na superfície de nível $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$, e tal que $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$.

   a) Prove que $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \gamma'(t_0) = 0$.

   b) Determine a equação do plano tangente à superfície de nível dada, no ponto $(x_0, y_0, z_0)$.

   c) Determine a equação do plano tangente à superfície de nível $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 14$, no ponto $(1, 1, 1)$.

6. Sejam $z = x^2 y,\ x = e^{t^2}$ e $y = 2t + 1$. Calcule $\dfrac{dz}{dt}$.

7. Seja $F(t) = f(e^{t^2}, \sin t)$, onde $f(x, y)$ é uma função dada, diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

   a) Calcule $F'(t)$ em termos das derivadas parciais de $f$.

   b) Calcule $F'(0)$ supondo $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 5$.

8. Seja $z = f(x^2, 3x + 1)$, onde $f(u, v)$ é uma função de classe $C^1$ em $\mathbb{R}^2$.

   a) Expresse $\dfrac{dz}{dx}$ em termos das derivadas parciais de $f$.

   b) Verifique que $\left.\dfrac{dz}{dx}\right|_{x=1} = 2\dfrac{\partial f}{\partial u}(1, 4) + 3\dfrac{\partial f}{\partial v}(1, 4)$.

9. Seja $g(t) = f(3t, 2t^2 - 1)$.

   a) Expresse $g'(t)$ em termos das derivadas parciais de $f$.

   b) Calcule $g'(0)$ admitindo $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, -1) = \dfrac{1}{3}$.

10. Suponha que, para todo $t$, $f(t^2, 2t) = t^3 - 3t$. Mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = -\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 2)$.

11. Admita que, para todo $(x,y)$, $4y\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2$. Calcule $g'(t)$, sendo $g(t) = f(2cost, sent)$.

12. Admita que, para todo $(x,y)$, $4y\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$. Prove que $f$ é constante sobre a elipse $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

13. Seja $z = f(u+2v, u^2 - v)$. Expresse $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ em termos das derivadas parciais de $f$.

14. Prove que a função $u = f(x+at, y+bt)$, $a$ e $b$ constantes, satisfaz a equação às derivadas parciais $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a\dfrac{\partial u}{\partial x} + b\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

15. Seja $g$ dada por $g(t) = f(x,y)\sin 3t$, onde $x = 2t$ e $y = 3t$. Verifique que

$$g'(t) = 3f(x,y)\cos 3t + \sin 3t\left[2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 3\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right],$$

onde $x = 2t$ e $y = 3t$.

16. Seja $F(x,y,z) = f\left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{y}{z}, \dfrac{z}{x}\right)$. Mostre que $x\dfrac{\partial F}{\partial x} + y\dfrac{\partial F}{\partial y} + z\dfrac{\partial F}{\partial z} = 0$.

17. Seja $F(u,v)$ diferenciável em $\mathbb{R}^2$, com $\dfrac{\partial F}{\partial v}(u,v) \neq 0$,para todo $(u,v)$. Suponha que, para todo $(x,y)$, $F(xy,z) = 0$, onde $z = z(x,y)$. Mostre que $x\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

18. Expresse $g'(t)$ em termos de derivadas parciais de $f$, sendo $g$ dada por:

    a) $g(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y), x = t^2$ e $y = \sin t$.

    b) $g(t) = t^3\dfrac{\partial f}{\partial x}(3t, 2t)$.

    c) $g(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(t^2, 2t) + 5\dfrac{\partial f}{\partial y}(\sin 3t, t)$.

19. Expresse $g''(t)$ em termos de derivadas parciais de $f$, sendo $g(t) = f(5t, 4t)$.

20. Considere a função $g(t) = f(a+ht, b+kt)$, com $a, b, h$ e $k$ constantes. Supondo $f(x,y)$ de classe $C^2$ num aberto de $\mathbb{R}^2$. Verifique que $g''(t) = h^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2hk\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) + k^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$.

21. Considere a função $z = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, \sin 3x)$. Verifique que $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, \sin 3x) + 3\cos 3x\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x, \sin 3x)$.

22. Seja $g(u,v) = f(2u+v, u-2v)$, onde $f(x,y)$ é suposta de classe $C^2$. Verifique que $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 5\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 5\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

23. Suponha que $z = z(x,y)$ satisfaça a equação $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} - x\dfrac{\partial z}{\partial x} = x^3y^2$ (todas as derivadas calculadas em $(x,y)$). Fazendo a mudança de variáveis $x = e^u$ e $y = e^v$, obtemos a nova função $\tau(u,v) = z(e^u, e^v)$: calcule $\dfrac{\partial^2 \tau}{\partial u^2} + 2\dfrac{\partial^2 \tau}{\partial u\partial v} - 2\dfrac{\partial \tau}{\partial u}$ (todas as derivadas calculadas em $(e^u, e^v)$).

## Gabarito

**Exercício 1** $J_f(x,y) = \begin{bmatrix} e^{x+2y} & 2e^{x+2y} \\ 2\cos(y+2x) & \cos(y+2x) \end{bmatrix}$, $J_g(u,v,w) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$,

$J_h(u,v,w) = \begin{bmatrix} e^{w+4v-2u} & 2e^{w+4v-2u} \\ 2\cos(2w+2v-u) & \cos(2w+2v-u) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2e^{w+4v-2u} & 4e^{w+4v-2u} & e^{w+4v-2u} \\ -\cos(2w+2v-u) & 2\cos(2w+2v-u) & 2\cos(2w+2v-u) \end{bmatrix}$

**Exercício 7** b) $F'(0) = 5$