$8^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios de SMA-332- Cálculo II

Eugenio Massa

NOTA: quando for pedida uma aproximação entende-se a aproximação linear

1. Seja $z = \sqrt{x} + y^{\frac{1}{3}}$.

   a) Calcule a diferencial de z no ponto $(1, 8)$.

   b) Calcule um valor aproximado para z, correspondente a $x = 1,01$ e $y = 7,9$.

   c) Calcule um valor aproximado para a variação $\triangle z$ em z, quando se passa de $x = 1$ e $y = 8$ para $x = 0,9$ e $y = 8,01$.

2. Calcule um valor aproximado para a variação $\triangle A$ na área de um retângulo quando os lados variam de $x = 2m$ e $y = 3m$ para $x = 2,01m$ e $y = 2,97m$.

3. Uma caixa de forma cilíndrica é feita com um material de espessura $0,03m$. As medidas internas são: altura 2 m e raio da base 1 m. A caixa é sem tampa. Calcule um valor aproximado para o volume do material utilizado na caixa.

4. A altura de um cone é $h = 20$ cm e o raio da base $r = 12$ cm. Calcule um valor aproximado para a variação $\triangle V$ do volume quando h aumenta 2 mm e r decresce 1 mm.

5. Medem-se os catetos de um triângulo retângulo, obtendo-se 3 cm e 4 cm, com possíveis erros de 0,02 cm. Usando diferenciais, obtenha uma aproximação do erro cometido, quando se calcula:
   (a) a hipotenusa (b) a área do triângulo.

6. Sejam $f(x, y) = y - x^2$ e $\gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen}^2 t)$.

   a) Verifique que a imagem de γ está contida na curva de nível $y - x^2 = 0$.

   b) Desenhe a imagem de γ.

   c) Verifique que para todo t, $\gamma'(t) \cdot \nabla f(\gamma(t)) = 0$.

7. Sendo $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

   a) Mostre que f é contínua em $\Re^2$;
   b) Calcular $f_x(x, y)$ $e f_y(x, y)$, $\forall (x, y) \in \Re^2 - (0, 0)$;
   c) Calcular $f_x(0, 0)$ e $f_y(0, 0)$;
   d) Mostre que f_x e f_y são contínuas em $\Re^2$;
   e) Calcule f_{xy} e f_{yx} para $(x, y) \neq (0, 0)$;
   f) Verifique que $f_{yx}(0, 0) \neq f_{xy}(0, 0)$. Há alguma contradição disto com a teoria? Justifique.

8. Seja $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$. Seja $g(v)$ diferenciável e $z(x, y) = g\left(\frac{x}{y}\right)$. Mostre que $\nabla z \cdot \mathbf{r} = 0$.

9. Justifique que f é diferenciável em todos os pontos de seu domínio, sendo:

   $$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

10. Admita que $T(x, y) = 16 - 2x^2 - y^2$ represente uma distribuição de temperatura no plano xy. Determine uma parametrização para a trajetória descrita por um ponto P que se desloca, a partir do ponto $(1, 2)$, sempre na direção e sentido de máximo crescimento da temperatura.

11. Suponha que $T(x,y) = 40 - x^2 - 2y^2$ represente uma distribuição de temperatura no plano xy. (Admita que x e y sejam dados em km e a temperatura em ^oC.) Um indíviduo encontra-se na posição $(3,2)$ e pretende dar um passeio:

    a) Descreva o lugar geométrico dos pontos que ele deverá percorrer se for seu desejo desfrutar sempre na mesma temperatura no ponto $(3,2)$.

    b)Qual a direção e sentido que deverá tomar se for seu desejo caminhar na direção de maior crescimento da temperatura?

    c) De quanto a temperatura se elevará aproximadamente, caso caminhe $0,01km$ na direção encontrada no item b).

    d) De quanto decrescerá, aproximadamente, a temperatura, caso caminhe $0,01km$ na direção $\overrightarrow{j}$?

Gabarito

Exercício 1 a) $dz(1,8) = h/2 + k/12$,

b) $3 + 0.01/2 - 0.1/12 \simeq 2.99666$ (exato$\simeq$ 2.99661926)

c)$-0.1/2 + 0.01/12 \simeq -0.049166$ (exato$\simeq$ -0.0504837)