$11^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios de SMA-332- Cálculo II

Eugenio Massa

1. Verifique que as transformações abaixo são localmente invertíveis em torno do ponto dado.
   a) $T(x,y) = (\sin(x+y), \sin x - \sin y)$ $\qquad P_0 = (0,0)$.
   b) $T(x,y) = (x, f(x,y))$ em torno de qualquer ponto (x_0,y_0) onde $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$.
   c) $T(x,y,z) = (x,y,f(x,y,z))$ em torno de qualquer ponto $P_0 = (x_0,y_0,z_0)$ onde $\frac{\partial f}{\partial z}(P_0) \neq 0$.

2. Seja $T(u,v) = (u-v, u/v)$ uma transformação definida para $v \neq 0$.
   a) Calcule $T(u,u)$.
   b) Mostre que T admite inversa local em torno de qualquer ponto (u_0,v_0) com $u_0 \neq v_0$ e $v_0 \neq 0$.

3. Seja $T(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.
   a) Mostre que T é localmente invertível em torno de qualquer ponto $(x_0,y_0) \neq (0,0)$.
   b) T admite inversa se restringirmos seu domínio a todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ exceto o $(0,0)$? Justifique.
   c) Mostre que o arco de circunferência dado por $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ onde $0 \leq \theta \leq \pi$ é levado por T na circunferência centrada na origem e raio r^2. d) desenhe no mesmo plano as curvas de nível de ambas as componentes de T, e interprete o resultado.

4. Suponha que $y = y(x)$ seja diferenciável e dada implicitamente pela equação $x = F(x^2 + y, y^2)$, onde $F(u,v)$ é diferenciável. Expresse $\dfrac{dy}{dx}$ em termos de x, y e das derivadas parciais de F.

5. A função diferenciável $z = z(x,y)$ é dada implicitamente pela equação $f\left(\dfrac{x}{y}, z\right) = 0$, onde $f(u,v)$ é diferenciável e $\dfrac{\partial f}{\partial v}(u,v) \neq 0$. Verifique que $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

6. Sejam $y = y(x)$, $z = z(x)$, $z > 0$, diferenciáveis e dadas implicitamente pelo sistema
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y = 1. \end{cases}$$
   (a) Expresse $\dfrac{dy}{dx}$ e $\dfrac{dz}{dx}$ em termos de x, y e z.
   (b) Expresse y e z em termos de x.
   (c) Desenhe a imagem da curva $\gamma(x) = (x, y(x), z(x))$.

7. Seja $g(u,v) = f(x,y)$, onde $x = x(u,v)$ e $y = y(u,v)$ são dadas implicitamente pelo sistema
$$\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = xy. \end{cases}$$
   Suponha que $x\dfrac{\partial f}{\partial x} - y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.
   (a) Mostre que $\dfrac{\partial y}{\partial u} = -\dfrac{y}{x}\dfrac{\partial x}{\partial u}$.
   (b) Calcule $\dfrac{\partial g}{\partial u}$.

8. Mostre que a equação $f(x,y) = 0$ define uma função implícita $y = g(x)$ em torno do ponto (x_0,y_0) e calcule $g'(x)$ nos seguintes casos:
   a)$f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 3$, $(x_0,y_0) = (1,2)$
   b) $f(x,y) = 2e^{x+y} - x + y$, $(x_0,y_0) = (1,-1)$
   c) $f(x,y) = xy - 1$, $(x_0,y_0) = (1,1)$. Calcule também g"(1).

9. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função com derivada contínua. Apresente uma condição que imposta à f possibilitará que a equação

$$2f(xy) = f(x) + f(y)$$

defina implicitamente y como uma função de x em torno de $(1, 1)$.

10. A equação $y^3 + xy + x^3 = 3$ define implicitamente alguma função diferenciável $y = y(x)$ perto do ponto $(1, 1)$? Em caso afirmativo, expresse $\dfrac{dy}{dx}$ em termos de x e y.

11. Mostre que cada uma das equações seguintes define implicitamente pelo menos uma função diferenciável $y = y(x)$. Diga em vizinhança de que ponto e expresse $\dfrac{dy}{dx}$ em termos de x e y.

    a) $x^2y + \sin y = x$

    b) $y^4 + x^2y^2 + x^4 = 3$

12. Mostre que cada uma das equações seguintes define implicitamente pelo menos uma função diferenciável $z = z(x, y)$. Diga em vizinhança de que ponto e expresse $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ em termos de x e y e z.

    a) $e^{x+y+z} + xyz = 1$

    b) $x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z$

13. Sejam $u = x + y$ e $v = \dfrac{y}{x}$. Calcule o determinante do jacobiano $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$.

14. É dada a curva γ que passa pelo ponto $\gamma(t_0) = (1, 3)$ e cuja imagem está contida na curva de nível $x^2 + y^2 = 10$. Suponha $\gamma'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$.

    a) Determine a equação da reta tangente a γ no ponto $(1, 3)$.

    b) Determine uma curva $\gamma(t)$ satisfazendo as condições acima.

15. Determine a equação da reta tangente à curva γ no ponto $\gamma(t_0) = (2, 5)$ sabendo-se que $\gamma'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$ e que sua imagem está contida na curva de nível $xy = 10$. Qual a equação da reta normal a γ, neste ponto?

16. Determine a equação da reta tangente à curva de nível dada, no ponto dado:

    a) $x^2 + xy + y^2 - 3y = 1$ em $(1, 2)$.

    b) $e^{2x-y} + 2x + 2y = 4$ em $(\frac{1}{2}, 1)$.

17. Determine uma reta que seja tangente à elipse $2x^2 + y^2 = 3$ e paralela à reta $2x + y = 5$.

18. Determine uma reta que seja tangente à elipse $x^2 + xy + y^2 = 7$ e paralela à reta $4x + 5y = 17$.

19. Seja $y = f(x)$ uma função diferenciável definida implicitamente pela equação $y^3 + xy + x^3 = 3x$. Determine as equações das retas tangente e normal ao gráfico de f no ponto $(1, 1)$.

20. Determine as equações do plano tangente e da reta normal à superfície dada, no ponto dado.

    a) $x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 8$ em $(1, -1, 1)$

    b) $2xyz = 3$ em $(\frac{1}{2}, 1, 3)$

    c) $ze^{x-y} + z^3 = 2$ em $(2, 2, 1)$

21. Considere o sistema

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

a) Encontre todos os pontos onde o sistema pode NÃO definir implicitamente duas funções $y(x)$ e $z(x)$.

b) Nos pontos encontrados, verifique se estariam definidas implicitamente funções $x(z)$ e $y(z)$ ou funções $x(y)$ e $z(y)$.

c) Tente visualizar o conjunto das soluções como intersecção de dois cilindros, e explique os resultados anteriores.

22. Verifique que o conjunto das soluções do seguinte sistema pode ser visto como o gráfico de uma função vetorial de uma das variáveis oportunamente escolhida (qual?), em vizinhança do ponto $(0, 1, 0)$. Determine as equações da reta tangente ao conjunto das soluções no ponto $(0, 1, 0)$.

$$\begin{cases} e^{x+z} + xy - y^2 = 0 \\ \ln(x + y) - x + z = 0. \end{cases}$$

23. Verifique que o conjunto das soluções do seguinte sistema pode ser visto como o gráfico de uma função vetorial de duas das variáveis oportunamente escolhidas (quais?), em vizinhança do ponto $(x, y, z, w) = (0, 0, 1, 1)$. Determine a matriz Jacobiana da função obtida no ponto correspondente.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + zve^x - 2 = 0 \\ xe^z + ye^v - z + v = 0. \end{cases}$$

Gabarito

Exercício 3 b) não: veja ponto c)

Exercício 4 $y'(x) = \frac{1-2xF_u(x^2+y,y^2)}{F_u(x^2+y,y^2)+2yF_v(x^2+y,y^2)}$

Exercício 6 a) $y'(x) = -1$, $z'(x) = \frac{y(x)-x}{z(x)}$

Exercício 8 c) $g'(1) = -1$, $g''(1) = 2$

Exercício 9 $f'(1) \neq 0$

Exercício 11 a) em todos os pontos $(0, k\pi)$: $k \in \mathbb{Z}$; $y'(0) = (-1)^k \; y''(0) = 0$

Exercício 12 a) em $(0, 0, 0)$, $z_x = -\frac{e^{x+y+z}+yz}{e^{x+y+z}+xy}$...

Exercício 19 $4(y - 1) = 1 - x$

Exercício 20 a) $4(z - 1) = -(x - 1) + 3(y + 1)$

Exercício 21 nos pontos $(\pm1, \pm1, 0)$ apenas define $x(z)$ e $y(z)$; nos pontos $(0, 0, \pm1)$ nenhuma função pode ser definida.

Exercício 22 reta $(x, y) = (-3z/2, 1 - z)$.

Exercício 22 $\frac{\partial(z,w)}{\partial(x,y)}(0, 0) = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 - e & -e \\ 1 + 3e & 3e \end{bmatrix}$