1 Algumas definições sobre funções

- Dados dois conjuntos A, B é dito **produto cartesiano de A com B** o conjunto
$$A \times B = \{(a,b): \ a \in A\,,\ b \in B\}\,.$$

- Dados dois conjuntos A, B, uma **função de A em B** é uma *lei que associa a cada elemento de A um elemento de B*.
Usaremos a notação
$$\begin{aligned} f:\ A &\to B \\ a &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

- A é dito **domínio** da função, B é dito **contradomínio** da função.

Dada
$$f : A \to B$$

- **Imagem de f** é o conjunto
$$Im(f) = \{b \in B: \ \exists\, a \in A: \ f(a) = b\}$$

- **Gráfico de f** é o conjunto
$$G(f) = \{(a,b) \in A \times B: \ b = f(a)\}$$

- Dado $C \subseteq A$ é dita **restrição de f a C** a função
$$f|_C : C \to B : x \mapsto f(x)$$

Convenção: Quando uma função é dada apenas pela fórmula, então consideraremos $\mathbb{R}$ como contradomínio e como domínio o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ tal que a fórmula faça sentido (**Domínio natural**).

- **Composição de funções**:
  dadas $f : D_f \to B$ e $g : D_g \to C$, se $Im(f) \subseteq D_g$, podemos definir "**g composto f**" assim:
  $$g \circ f : D_f \to C : x \mapsto g(f(x))\,.$$

Dada
$$f : A \to B$$

- f é dita **sobrejetora** se $Im(f) = B$. Isto é,
  $$\forall\, b \in B\ \exists\, a \in A :\ f(a) = b.$$

- f é dita **injetora** se
  $$x_1, x_2 \in A \text{ com } x_1 \neq x_2 \text{ implica } f(x_1) \neq f(x_2)$$
  equivalentemente,
  $$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$
  ou também
  $$\text{dado } b \in B, \text{ se existir } a \in A :\ f(a) = b, \text{ é único.}$$

- f é dita **bijetora** se é sobrejetora e injetora. Isto é,
  $$\forall\, b \in B\ \exists!\, a \in A :\ f(a) = b.$$

- $f : A \to B$ é dita **invertível** se existir $g : B \to A$ tal que
  $$g \circ f = id_A \qquad \text{e} \qquad f \circ g = id_B,$$
  isto é,
  $$g(f(x)) = x\ \forall\, x \in A \quad \text{e} \quad f(g(y)) = y\ \forall\, y \in B.$$

Se existir esta g, é única, logo a chamamos de **inversa de f** e denotamos por f^{-1}

Teorema. *$f : A \to B$ é invertível $\Leftrightarrow$ f é bijetora*

---

2 Propiedades de funções reais

Dada $f : D \to C$ com $D, C \subseteq \mathbb{R}$.

- f é dita **limitada superiormente** se

$$\text{existe } L \in \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) < L \text{ para todo } x \in D.$$

- f é dita **limitada inferiormente** se

$$\text{existe } L \in \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) > L \text{ para todo } x \in D.$$

- f é dita **limitada** se

$$\text{existe } L \in \mathbb{R} \text{ tal que } |f(x)| < L \text{ para todo } x \in D.$$

Definimos também

- se existir

$$x_0 \in D \text{ tal que } f(x_0) \geq f(x) \text{ para todo } x \in D$$

  então chamamos
  – x_0 "**ponto de máximo (absoluto/global) de f**"
  – $f(x_0)$ "**máximo (absoluto/global) de f**".

- se existir

$$x_0 \in D \text{ tal que } f(x_0) \leq f(x) \text{ para todo } x \in D$$

  então chamamos
  – x_0 "**ponto de mínimo (absoluto/global) de f**"
  – $f(x_0)$ "**mínimo (absoluto/global) de f**".

- f é dita **crescente** se
$$x, y \in D \text{ e } x < y \text{ implica } f(x) \leq f(y).$$
- f é dita **estritamente crescente** se
$$x, y \in D \text{ e } x < y \text{ implica } f(x) < f(y).$$
- f é dita **decrescente** se
$$x, y \in D \text{ e } x < y \text{ implica } f(x) \geq f(y).$$
- f é dita **estritamente decrescente** se
$$x, y \in D \text{ e } x < y \text{ implica } f(x) > f(y).$$
- f é dita **monótona** se vale uma das anteriores.

3 Simetrias de funções

Dada $f : D \to C$ com $D, C \subseteq \mathbb{R}$.

- Suponha que D seja *simétrico com respeito à origem*, isto é,
$$\text{se } x \in D \text{ então } -x \in D.$$
  - f é dita **par** se $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in D$.
  - f é dita **ímpar** se $f(x) = -f(-x)$ para todo $x \in D$.
- Suponha que D tenha a propriedade que
$$\text{existe } T \in \mathbb{R} \text{ tal que se } x \in D \text{ então } x + T \in D.$$
  - f é dita **T-periódica** se $f(x) = f(x + T)$ para todo $x \in D$.
  - o menor $T > 0$ tal que f é T-periódica (se existir) é dito **período mínimo de f**

---

4 Algumas funções típicas

- **função constante**: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto k$ com k fixado.
- **função identidade**: $f : A \to A : x \mapsto x$.
- **função linear**: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto ax$ com a fixado.
- **função afim**: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto ax + b$ com a, b fixados.
- **função polinomial**: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto p(x)$ com p polinômio: $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$.
- **função racional**: $f : D \to \mathbb{R} : x \mapsto p(x)/q(x)$ com p, q polinômios, $D = \{x \in \mathbb{R} : \; q(x) \neq 0\}$.
- **função algébrica**: $f : D \to \mathbb{R}$ definida compondo as 4 operações e radicais. Neste caso

  $D = \{x \in \mathbb{R}$: nunca divido por 0 nem pego raiz de índice par de um negativo$\}$

  Exemplo:
  $$\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{x-\sqrt{x}} \quad \text{com } D = (1, +\infty)\,.$$

5 Funções trigonométricas

Sejam $C := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2=1\right\}$ o círculo de centro $O \equiv (0,0)$ e raio 1 e $\theta \in \mathbb{R}$.

Seja $P(\theta) \equiv (X(\theta), Y(\theta))$ **o ponto de C obtido caminhando ao longo de C por uma distância θ em sentido anti-horário, começando em $A = (1,0)$.**

Definimos:

$$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \theta \mapsto \cos(\theta) = X(\theta)$$
$$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \theta \mapsto \sin(\theta) = Y(\theta)$$

θ é a medida em **radianos** do ângulo $\widehat{AOP}$

5.1 Relações entre funções trigonométricas

$$\cos^{\mathbf{2}}(\mathbf{x}) + \sin^{\mathbf{2}}(\mathbf{x}) = \mathbf{1},$$

$$\cos(x) = \sin(x+\pi/2)$$

$$\cos(x) = \cos(-x)\,, \qquad \sin(x) = -\sin(-x)$$

$$\cos(x) = -\cos(x+\pi)\,, \qquad \sin(x) = -\sin(x+\pi)$$

$$\cos(x+\phi) = \cos(x)\cos(\phi) - \sin(x)\sin(\phi)$$
$$\sin(x+\phi) = \cos(x)\sin(\phi) + \sin(x)\cos(\phi)$$
$$\cos(x-\phi) = \ldots..$$

....

em particular

$$\cos(\mathbf{2x}) = \cos^{\mathbf{2}}(\mathbf{x}) - \sin^{\mathbf{2}}(\mathbf{x})\,, \qquad \sin(\mathbf{2x}) = \mathbf{2}\sin(\mathbf{x})\cos(\mathbf{x})$$

$$\cos(\mathbf{x}) = \pm\sqrt{\frac{\mathbf{1}+\cos(\mathbf{2x})}{\mathbf{2}}}\,, \qquad \sin(\mathbf{x}) = \pm\sqrt{\frac{\mathbf{1}-\cos(\mathbf{2x})}{\mathbf{2}}}\,,$$

$$
\begin{aligned}
2\cos(x)\cos(\phi) &= \cos(x+\phi) + \cos(x-\phi) \\
2\cos(x)\sin(\phi) &= .....
\end{aligned}
$$

....

$$
\begin{aligned}
\cos(x) + \cos(\phi) &= 2\cos\left(\frac{x+\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{x-\phi}{2}\right) \\
\cos(x) + \sin(\phi) &= .....
\end{aligned}
$$

....

Mais funções trigonométricas

- $tan(x)$= $\sin(x)/\cos(x)$: $D = \{x \in \mathbb{R} : \ x \neq \pi/2 + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}$
- $cotan(x)$= $\cos(x)/\sin(x)$: $D = \{x \in \mathbb{R} : \ x \neq k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}$
- $sec(x)$= $1/\cos(x)$: $D = \{x \in \mathbb{R} : \ x \neq \pi/2 + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}$
- $cosec(x)$= $1/\sin(x)$: $D = \{x \in \mathbb{R} : \ x \neq k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}$
- $arcsin$: a inversa de $\sin^* : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1,1] : x \mapsto \sin(x)$
- $arccos$: a inversa de $\cos^* : [0, \pi] \to [-1,1] : x \mapsto \cos(x)$
- $arctan$: a inversa de $tan^* : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R} : x \mapsto tan(x)$

6 Potências (resumo)

Definimos a^b nos seguintes casos:

- para $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$
- para $a < 0$ e $b \in \mathbb{Q}$ com denominador ímpar
- para $a = 0$ e $b > 0$ (0^0 n.f.s.)

Função potência

$D \to \mathbb{R} : x \mapsto x^\alpha$ onde os requisitos para o domínio são:

- se $\alpha \in \mathbb{Q}$ com denominador par, ou $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, **precisa por** $x \geq 0$
- se $\alpha \leq 0$ **precisa por** $x \neq 0$

Função exponencial

$\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto a^x$ onde $a > 0$

Função logaritmo

$(0, \infty) \to \mathbb{R} : y \mapsto \log_a(y)$ onde $a > 0,\ a \neq 0$: inversa de $a^x : \mathbb{R} \to (0, \infty)$

---

7 Funções hiperbólicas

Definição:

$$\mathbf{Sh(x)} = \frac{\mathbf{e^x - e^{-x}}}{\mathbf{2}}, \qquad \mathbf{Ch(x)} = \frac{\mathbf{e^x + e^{-x}}}{\mathbf{2}}, \qquad \mathbf{Th(x)} = \frac{\mathbf{Sh(x)}}{\mathbf{Ch(x)}}$$

Relações:

$$\mathbf{Ch^2(x) - Sh^2(x) = 1},$$

$$\mathbf{Ch(2x) = Ch^2(x) + Sh^2(x)}, \qquad \mathbf{Sh(2x) = 2Sh(x)Ch(x)}$$

Inversas:

$$SettSh = Sh^{-1}$$

$$SettCh = (Ch^*)^{-1} \qquad \text{onde } Ch^* : [0, \infty) \to [1, \infty) : x \mapsto Ch(x)$$

$$SettTh = (Th^*)^{-1} \qquad \text{onde } Th^* : \mathbb{R} \to (-1, 1) : x \mapsto Th(x)$$

Formula explicita para as inversas:

$$SettSh(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

$$SettCh(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})\Big|_{[1,\infty)}$$

$$SettTh(y) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right)\Bigg|_{(-1,1)}$$

8 Gráficos de funções trigonométricas

seno e cosseno
seno, cosseno e tangente
tangente e cotangente
cosecante e secante
arcoseno e arcocosseno
arcotangente
parametrização do circulo

9 Gráficos de potências

$x,\ x^2,\ x^3,\ x^4$
$x,\ \sqrt{x},\ \sqrt[3]{x},\ \sqrt[4]{x}$
$x,\ \sqrt{x},\ x^2$
$1/x,\ 1/x^2,\ 1/x^3,\ 1/\sqrt{x},\ 1/\sqrt[3]{x},\ 1/\sqrt[4]{x},$

10 Gráficos de funções exponenciais, logaritmicas e hiperbólicas

exponencial e logaritmo natural
2^x e 4^x
2^x e 4^x com inversas
seno hiperbólico
cosseno hiperbólico
as três hiprbólicas
as três hiprbólicas inversas
parametrização da hipérbole