1 Máximos e mínimos

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $p \in D_f$

- p é **ponto de máximo global (absoluto) de f** se

$$\forall\, x \in D_f \text{ vale } f(x) \leq f(p)$$

  – $f(p)$ é **máximo global (absoluto) de f**.

- p é **ponto de máximo local de f** se

$$\exists\, \delta : \forall\, x \in D_f \cap V_\delta(p) \text{ vale } f(x) \leq f(p)$$

  – $f(p)$ é **máximo local de f**.

- p é **ponto de mínimo global (absoluto) de f** se

$$\forall\, x \in D_f \text{ vale } f(x) \geq f(p)$$

  – $f(p)$ é **mínimo global (absoluto) de f**.

- p é **ponto de mínimo local de f** se

$$\exists\, \delta : \forall\, x \in D_f \cap V_\delta(p) \text{ vale } f(x) \geq f(p)$$

  – $f(p)$ é **mínimo local de f**.

- p é **ponto extremal (local ou global) de f** se for ponto de máximo ou de mínimo (local ou global) de f.

- p é **ponto crítico de f** se vale $f'(p) = 0$.

- Seja $A \subseteq \mathbb{R}$:
  - p é dito **ponto interior de** A se
  $$\exists\, \delta > 0 \ : V_\delta(p) \subseteq A\,;$$
  - p é dito **ponto exterior de** A se
  $$\exists\, \delta > 0 \ : V_\delta(p) \cap A = \emptyset\,;$$
  - p é dito **ponto de fronteira de** A se
  $$\forall\, \delta > 0 \qquad \exists\, q \in V_\delta(p) \setminus A \qquad e \qquad \exists\, r \in V_\delta(p) \cap A\,.$$

Teorema (de Fermat).
Seja f derivável em (a, b): se $p \in (a, b)$ é ponto extremal, **então** $f'(p) = 0$.

Consequências:

- *todo ponto extremal que seja ponto interior do domínio da derivada é ponto crítico;*
- *se p é ponto interior do domínio da derivada e $f'(p) \neq 0$ então p não é ponto extremal.*

RESUMO: **Possíveis pontos extremais**:

- pontos *interiores de $D_{f'}$* que sejam *críticos*,
- pontos *onde f não é derivável*,
- ponto *na borda de $D_{f'}$*,
- pontos *onde f não é contínua*.

2 Uso da derivada primeira

Teorema 2.1 (**de Rolle**).
Seja f contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b): se $f(a) = f(b)$
então existe $c \in (a, b)$ **tal que** $f'(c) = 0$.

Teorema 2.2 (**do valor médio**).
Seja f contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b):
então existe $c \in (a, b)$ **tal que** $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Teorema 2.3 (**de Cauchy**).
Sejam f, g contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b):
então existe $c \in (a, b)$ **tal que** $f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)]$.

Corolário 2.4.
Seja f contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b):

- se $f'(x) > 0$ em (a, b), **então** f **é estritamente crescente em** $[a, b]$,
- se $f'(x) \geq 0$ em (a, b), **então** f **é crescente em** $[a, b]$,
- se $f'(x) < 0$ em (a, b), **então** f **é estritamente decrescente em** $[a, b]$,
- se $f'(x) \leq 0$ em (a, b), **então** f **é decrescente em** $[a, b]$,
- se $f'(x) = 0$ em (a, b), **então** f **é constante em** $[a, b]$.

Também vale: se f é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b):

- se f é crescente (ou estr. cresc.) em $[a, b]$ **então** $f'(x) \geq 0$ **em** (a, b),
- se f é decrescente (ou estr. decresc.) em $[a, b]$ **então** $f'(x) \leq 0$ **em** (a, b).

Corolário 2.5 (**teste da derivada primeira**).
Seja $c \in (a, b)$, e f contínua em $[a, b]$ e derivável em $(a, b) \setminus \{c\}$:
se $f'(x) \geq 0$ em (a, c) e $f'(x) \leq 0$ em (c, b), **então** c **é ponto de máximo local**;
se $f'(x) \leq 0$ em (a, c) e $f'(x) \geq 0$ em (c, b), **então** c **é ponto de mínimo local**.

3 Uso da derivada segunda

NOTAÇÃO:
denotemos por $T_p(x) = f(p) + f'(p)(x - p)$ a reta tangente no ponto p ao gráfico de f.

Seja f derivável em (a, b): dizemos que

- **f tem concavidade para cima em** (a, b) se

$$\forall\, x, p \in (a, b),\ \ x \neq p, \qquad \text{vale } f(x) > T_p(x)\,;$$

- **f tem concavidade para baixo em** (a, b) se

$$\forall\, x, p \in (a, b),\ \ x \neq p, \qquad \text{vale } f(x) < T_p(x)\,.$$

Teorema 3.1.
Se f é derivável em (a, b) e

- f' é estrit. crescente em (a, b), **então f tem concavidade para cima em** (a, b),
- f' é estrit. decrescente em (a, b), **então f tem concavidade para baixo em** (a, b).

Corolário 3.2.
Se f é duas vezes derivável em (a, b) e

- $f'' > 0$ em (a, b), **então f tem concavidade para cima em** (a, b),
- $f'' < 0$ em (a, b), **então f tem concavidade para baixo em** (a, b).

Corolário 3.3 (teste da derivada segunda).
Seja f duas vezes derivável em $(p - \delta, p + \delta)$, $f'(p) = 0$ e f'' contínua em p:

- se $f''(p) > 0$ **então p é ponto de mínimo local**,
- se $f''(p) < 0$ **então p é ponto de máximo local**.

Definição: p é dito **ponto de inflexão de f** se existir um $\delta > 0$ tal que:

- f é contínua em $(p-\delta, p+\delta)$, derivável em $(p-\delta, p)$ e em $(p, p+\delta)$, e vale uma das seguintes:
  - f tem concavidade para cima em $(p-\delta, p)$ e para baixo em $(p, p+\delta)$,
  - f tem concavidade para baixo em $(p-\delta, p)$ e para cima em $(p, p+\delta)$.

Além disso, se f é derivável em p, classificamos em

- **ponto de inflexão horizontal**, se $f'(p) = 0$,
- **ponto de inflexão oblíqua**, se $f'(p) \neq 0$.

Vale o seguinte:

- se f é duas vezes derivável em $(p-\delta, p+\delta)$ e p é de inflexão **então** $f''(p) = 0$,
- se f é três vezes derivável em $(p-\delta, p+\delta)$, $f''(p) = 0$ e $f'''(p) \neq 0$ **então p é de inflexão**.

Teorema (Regra de l´Hôpital).
Sejam f, g deriváveis e $g'(x) \neq 0$ no conjunto $(p-\delta, p+\delta) \setminus \{p\}$.
Se

$$\lim_{x \to p} f(x) = \lim_{x \to p} g(x) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x \to p} f(x) = \lim_{x \to p} g(x) = \pm\infty$$

e

$$\exists \lim_{x \to p} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L\,,$$

então

$$\exists \lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

OBS:

- vale também se L é $+\infty$ ou $-\infty$;
- vale também para limites do tipo $x \to p^{\pm}$ ou $x \to \pm\infty$.

4 Polinômio de Taylor

Lembrando:

Se existe $f'(p)$ então a *reta tangente*

$$T_p(x) = f(p) + f'(p)(x - p)$$

satisfaz

$$\mathbf{f(x) - T_p(x) := e_p(x) = o(x - p)} \text{ quando } \mathbf{x \to p}\,.$$

Isto é, $T_p(x)$ *é o único polinômio de grau (até) 1 tal que*

$$T_p(p) = f(p), \qquad T'_p(p) = f'(p),$$

mas também *é o único polinômio de grau (até) 1 tal que*

$$f(x) - T_p(x) := e_p(x) = o(x - p) \text{ quando } x \to p\,.$$

Pergunta 1) Se f é k vezes derivável em p, existe polinômio P tal que

$$P^{(j)}(p) = f^{(j)}(p) \text{ para todo j=0,...,k ?}$$

Resposta) SIM: de fato, existe um único polinômio de grau (até) k satisfazendo o pedido:

$$T^k_{f,p}(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(p)}{j!}(x - p)^j$$

chamado **Polinômio de Taylor de ordem k, da função f, no ponto p.**

OBS Por convenção (deixa as fórmulas mais simples) consideramos $x^0 = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$; também definimos $0! = 1$

Pergunta 2) vale uma propriedade análoga a

$$f(x) - T_p(x) := e_p(x) = o(x-p) \text{ quando } x \to p$$

para o polinômio de Taylor?

Resposta) SIM:

Teorema (P.d.T. com resto de Peano).
Se f é k vezes derivável em p, **então**

$$\lim_{x\to p} \frac{f(x) - T^k_{f,p}(x)}{(x-p)^k} = 0\,.$$

Em outras palavras,

$$\mathbf{f(x) - T^k_{f,p}(x) = o((x-p)^k)} \text{ quando } \mathbf{x \to p}\,.$$

Além disso, $T^k_{f,p}(x)$ **é o único polinômio de grau (até)** k **com esta propriedade**.

Pergunta 3) vale uma propriedade análoga ao teorema do valor médio para o polinômio de Taylor?

Resposta) SIM:

Teorema (P.d.T. com resto de Lagrange).
Se, para um $\delta > 0$, f é $k+1$ vezes derivável em $V_\delta(p)$, **então dado** $x \in V_\delta(p) \setminus \{p\}$ **existe** $c_x \in (p, x)$ **se** $x > p$ **(resp.** $c_x \in (x, p)$ **se** $x < p$**) tal que**

$$f(x) - T^k_{f,p}(x) = \frac{f^{(k+1)}(c_x)}{(k+1)!}(x-p)^{k+1}\,.$$

Observe que se $k = 0$ é o T.V.M: $f(x) - T^0_{f,p}(x) = f(x) - f(p) = \frac{f'(c)}{1}(x-p)$.

4.1 Alguns exemplos de Polinômio de Taylor

$\sin(x)$ com $T^1,\ T^3,\ T^5,\ T^7,\ T^{13}$ $\ln(x)$ com $T^1,\ T^4,\ T^7,\ T^{10}$ zoom $\ln(x)$ com $T^1,\ T^4,\ T^7,\ T^{10},\ T^{13}$

$$T^k_{e^x,0} = \sum_{j=0}^{k} \frac{x^j}{j!} \qquad = 1 + x + x^2/2 + x^3/3! + x^4/4! + ... \tag{4.1}$$

$$T^k_{\sin,0} = \sum_{j=0}^{[\![(k-1)/2]\!]} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} \qquad = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + x^9/9! + ... \tag{4.2}$$

$$T^k_{Sh,0} = \sum_{j=0}^{[\![(k-1)/2]\!]} \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} \qquad = x + x^3/3! + x^5/5! + x^7/7! + x^9/9! + ... \tag{4.3}$$

$$T^k_{\cos,0} = \sum_{j=0}^{[\![k/2]\!]} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!} \qquad = 1 - x^2/2 + x^4/4! - x^6/6! + x^8/8! + ... \tag{4.4}$$

$$T^k_{Ch,0} = \sum_{j=0}^{[\![k/2]\!]} \frac{x^{2j}}{(2j)!} \qquad = 1 + x^2/2 + x^4/4! + x^6/6! + x^8/8! + ... \tag{4.5}$$

$$T^k_{\ln(1+x),0} = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \frac{x^j}{j} \qquad = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + x^5/5 - x^6/6 + ... \tag{4.6}$$

$$T^k_{1/(1+x),0} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j x^j \qquad = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 + ... \tag{4.7}$$