9ª Lista de Exercícios de SMA-301 Cálculo 1

Eugenio Massa

Hôpital e Polinômio de Taylor

1. Calcule os seguintes limites usando a regra de L'Hôpital (se possível e necessário):

   $(a)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{1-e^x}$ $\quad(b)\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{e^{3x}}$ $\quad(c)\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\arctan\frac{1}{x}}$ $\quad(d)\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{3\cos x}{2x-\pi}$ $\quad(e)\ \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

   $(f)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - x}{x-\operatorname{sen}x}$ $\quad(g)\ \lim\limits_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}}$ $\quad(h)\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2^x}{e^x}$ $\quad(i)\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln(\operatorname{sen}x)}{(\pi-2x)^2}$ $\quad(j)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^x-3^x}{x}$

   $(k)\ \lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sen}x \ln x$

2. Calcule os seguintes limites (indeterminação 0^∞ e ∞^0)

   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)^x$ $\quad(b)\ \lim\limits_{x\to 0^-}(1-\cos x)^{\frac{1}{x}}$ $\quad(c)\ \lim\limits_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen}x}$ $\quad(d)\ \lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1)^{\frac{1}{\ln x}}$

   $(e)\ \lim\limits_{x\to 0^+}(\sin(x))^{\frac{1}{\ln x}}$ $\quad(f)\ \lim\limits_{x\to+\infty}(Ch(x))^{\frac{1}{\ln x}}$

3. Engenheiros freqüentemente usam a aproximação $\operatorname{sen}x \approx x$ para valores pequenos de x. Explique por que.

4. Qual função afim ($f(x) = ax + b$) é uma boa aproximação para a função $\sqrt{x}$ em uma vizinhança de 1?

5. Calcule o polinômio de Taylor de ordem n (qualquer) em $p = 0$ das seguintes funções:
   a) $\sin(x)$, b) $\cos(x)$, c) e^x, d) e^{-x}, e) $\cosh(x)$, f) $\sinh(x)$, g) $\ln(1+x)$, h) $1/(1+x)$.

6. Use o computador para desenhar os gráficos das funções do exercício anterior junto com seus polinômios de Taylor de ordem 2,4,6,10 e 16. Comente.

7. Calcule o polinômio de Taylor em $p = 0$ da ordem indicada, para as seguintes funções:
   a) $\sin(x^2)$, grau 8 b) $\sin^2(x)$, grau 6 c) $\sin(x)\cosh(x)$, grau 6

8. Ache o polinômio de Taylor do n-ésimo grau no ponto a para as seguintes funções:
   $(a)\ f(x) = \dfrac{1}{x-2}$; $a = 1$; $n = 3$.
   $(b)\ f(x) = e^{-x}$; $a = 0$; $n = 4$.
   $(c)\ f(x) = x^{3/2}$; $a = 4$; $n = 3$.
   $(d)\ f(x) = \operatorname{sen}x$; $a = \dfrac{\pi}{6}$; $n = 3$.
   $(e)\ f(x) = \sqrt{x}$; $a = 4$; $n = 4$.

9. Seja $f = x^2 + 3x$. (a) Calcule a diferencial.
   (b) Calcule o erro que se comete na aproximação de $\triangle f := f(x) - f(p)$ por df_p. Interprete graficamente.

10. Use uma oportuna aproximação linear para calcular $(5,103)^2$ e compare com seu valor real 26.040609.

11. Use uma oportuna aproximação linear para calcular $\dfrac{1}{9,78}$ e compare com o valor 0.10224949 obtido com uma calculadora.

12. **(!)** Calcule o valor de $\ln(1,2)$ com quatro casas decimais de precisão expandindo $f(x) = \ln(1+x)$ como polinômio de Taylor em torno de $a = 0$.

13. Aplique a fórmula de Taylor para expressar o polinômio $p(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ como um polinômio em potências de $(x-1)$.

14. **(*)** Queremos aproximar o valor de $\cos(1)$ e de $\sin(1)$ através de seus polinômios de Taylor calculados em 0. Qual será o grau do polinômio necessário para o erro ser menor de 10^{-k}?

15. Calcule os seguintes limites usando oportunos polinômios de Taylor (se possível e necessário):

$(a)\ \lim_{x\to 0^+} \dfrac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^\alpha}$ $\qquad (b)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}+\cos(3x)-2+\sin^2(x)}{x\sin(x)}$ $\qquad (c)\ \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\cos\frac{1}{x}+\cosh(\frac{1}{x})-2}{x^\alpha}$

16. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una função 3 vezes derivável em 0 com $f(0)=0$, $f'(0)=2$, $f''(0)=-1$, $f'''(0)=\pi$.
a) Calcular o polinômio de Taylor de grau 3 (em 0) da função $g(x)=e^x f(x)$.
b) Calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)-f(x)}{f(x^2)}\,.$$

17. **(!)** Seja f uma função 3 vezes derivável: calcular $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)-2hf'(a)}{h^3}$

18. **(!)** Num programa pode ser computada a derivada de uma função 3 vezes derivável, através das seguintes fórmulas: a) $\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{2h}$; b) $\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$; c) $\frac{2f(a+h)-f(a-h)-f(a)}{3h}$.
- Use o polinômio de Taylor em a para verificar se é verdade que as três aproximam $f'(a)$ (quer dizer, o limite para $h\to 0$ é $f'(a)$) e para determinar qual delas é a melhor (quer dizer, o erro cometido diminui mais rapidamente quando $h\to 0$).
- Dê uma aproximação do erro cometido em termos das derivadas de ordem superior a 1 da f em a.
- Proponha uma fórmula que aproxime $f''(a)$

19. **(*!)** Considere a função $f(x)=\begin{cases} e^{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} & x\neq 0\,, \\ 0 & x=0 \end{cases}$:
a) Quantas vezes é derivável?
b) Esboce o gráfico.
c) Calcule seu polinômio de Taylor T_0^n, de ordem n em 0:
d) Encontre (se for possível) n tal que $|f(1)-T_0^n(1)|<0.1$

Gabarito

Exercício 1 a) -1, b) 0, c) 1, d) $-3/2$, f) 2, g) $+\infty$, h) $+\infty$, k) 0.
Exercício 2 a) 0, c) 1, d) e^2, e) e, f) $+\infty$
Exercício 7 a) $x^2-x^6/6$ b) $x^2-x^4/3+2x^6/45$
Exercício 8 c) $8+3(x-4)+(3/16)(x-4)^2-(1/128)(x-4)^3$
d) $(1/2)+(\sqrt{3}/2)(x-\pi/6)-(1/4)(x-\pi/6)^2-(\sqrt{3}/12)(x-\pi/6)^3$
Exercício 10 $25+10*0.103=26.03$
Exercício 11 $0.1-0.01*0.22=0.1022$
Exercício 16 $2x+\frac{3}{2}x^2+(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{6})x^3$; $\lim=1$
Exercício 17 $f'''(a)/3$
Exercício 19 a) infinitas vezes em $\mathbb{R}$, d) impossível!!