

8ª Lista de Exercícios de SMA-301 Cálculo 1

Eugenio Massa

Esboço de gráficos

1. Encontre todos os pontos críticos (onde $f' = 0$) das funções dadas:
(a) $f(x) = x^3 + 7x^2 - 5x$ (b) $f(x) = x^{7/3} + x^{4/3} - 3x^{1/3}$ (c) $f(t) = (t^2 - 4)^{2/3}$ (d) $h(x) = \frac{x-3}{x+7}$
(e) $g(x) = [\text{sen}(3x)]^2$ (f) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ (g) $h(z) = ze^{2z}$
2. Ache os pontos de máximo e de mínimo (locais e globais) das funções dadas, nos intervalos indicados.
(a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4$; $[-2, 1]$ (b) $f(x) = x|x-2|$; $[0, 3]$
(c) $g(x) = x^2 + \frac{2}{x}$; $[\frac{1}{2}, 2]$ (d) $g(x) = \sqrt{9-x^2}$; $[-1, 2]$
(e) $h(x) = \frac{4}{(x-3)^2}$; $[2, 5] \setminus \{3\}$ (f) $f(x) = \sqrt{|x|}$; $[-1, 2]$
3. Um campo retangular à margem de um rio deve ser cercado, com exceção do lado ao longo do rio. Se o custo do material for de R\$12,00 por metro linear no lado paralelo ao rio e de R\$8,00 por metro linear nos dois extremos, ache o campo de maior área possível que possa ser cercado com R\$3.600,00 de material.
4. Ache as dimensões do cilindro circular reto de maior volume que possa ser inscrito num cone circular reto com um raio de 5 cm e 12 cm de altura.
5. Ache as dimensões do maior jardim retangular que pode ser fechado com 100 m de cerca.
6. As dimensões de um retângulo de área máxima com base no eixo x e vértices superiores sobre a parábola $y = 12 - x^2$ pertencem ao intervalo:
(a) $[2, 5]$ (b) $[0, 3]$ (c) $(3, 7]$ (d) $[4, 9]$ (e) $[0, 6]$
7. Verifique se as hipóteses do teorema de Rolle estão satisfeitas pelas funções abaixo nos intervalos indicados. Ache, então, um valor c que satisfaça a conclusão do teorema de Rolle.
(a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$; $[1, 3]$
(b) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$; $[1, 2]$
(c) $f(x) = \text{sen}(2x)$; $[0, \pi/2]$
8. Verifique se as hipóteses do teorema do valor médio estão satisfeitas pelas funções abaixo nos intervalos indicados. Ache, então, um valor c que satisfaça a conclusão do teorema do valor médio.
(a) $f(x) = x^2 + 2x - 1$; $[0, 1]$
(b) $f(x) = x^3 + x^2 - x$; $[-2, 1]$
(c) $f(x) = x^{2/3}$; $[0, 1]$
9. Seja $c \in \mathbb{R}$ constante. Use o teorema de Rolle para provar que a equação $x^3 + 2x + c = 0$ não pode ter mais do que uma raiz real.
10. Seja f uma função contínua em $[a, b]$ tal que $f'(x) = 1, \forall x \in (a, b)$. Prove que $f(x) = x - a + f(a), \forall x \in [a, b]$. (Dica: use o teorema do valor médio)
11. Verifique que para todo $n \in \mathbb{N}$, a função $f_n(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}) & x \in (0, 1/n\pi], \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, satisfaz as hipóteses do teorema de Rolle; em seguida deduza que em toda vizinhança de 0 existe pelo menos um ponto crítico da f .

12. (!) Mostre que $e^x > \frac{x^n}{n!}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \geq 0$. ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$: lê-se n fatorial).
 Roteiro: 1) Mostre que é verdade para $x = 0$. 2) Use a derivada primeira para mostrar que $e^x - x$ é uma função não decrescente em $(0, +\infty)$. 3) Usando o resultado anterior, mostre que $e^x - x^2/2$ é uma função não decrescente em $(0, +\infty)$ 4) Generalize.
13. a) Determinar o maior intervalo I que contém $x = 0$, no qual a função $f(x) = x^4 - 4x + 1$ é invertível (definir apropriadamente o contradomínio de $f|_I$).
 b) Dita f^{-1} a inversa de $f|_I$, calcular, se possível, $(f^{-1})'(6)$.
14. (!) Mostre que para todo $x > 0$, tem-se
- $$(a) \cos x > 1 - \frac{x^2}{2} \qquad (b) \operatorname{sen} x > x - \frac{x^3}{3!}$$
15. Encontre o ponto sobre a reta $y = 4x + 7$ que está mais próximo da origem.
16. Encontre o ponto sobre a parábola $x + y^2 = 0$ que está mais próximo do ponto $(0, -3)$.
17. Considere o gráfico da função $f : [-2, 3/2] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ e o ponto P de coordenadas $(0, 3/2)$:
 a) encontre o ponto A pertencente ao gráfico, que tenha distância máxima de P ;
 b) encontre o ponto B pertencente ao gráfico, que tenha distância mínima de P .
18. (!) Para um peixe nadando a uma velocidade v em relação à água, a energia gasta por unidade de tempo é proporcional a v^3 . Acredita-se que peixes migratórios tentam minimizar a energia total requerida para nadar uma distância fixa. Se o peixe estiver nadando contra uma corrente u ($u < v$), então o tempo requerido para nadar uma distância L é $\frac{L}{v-u}$ e a energia total E requerida para nadar a distância é dada por $E(v) = av^3 \frac{L}{v-u}$ onde a é uma constante de proporcionalidade. Determine o valor de v que minimiza E e esboce o gráfico de E .

Esboços de gráficos

19. Esboce o gráfico das funções a seguir, seguindo o roteiro no final desta lista:

$$(a) f(x) = x^3 - 12x + 1 \quad (b) f(x) = xe^{-3x} \quad (c) f(x) = 2 \cos(3x) \quad (d) f(x) = x \ln x \quad (e) f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$(f) f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (g) f(x) = \frac{2}{x^2 + 3} \quad (h) f(x) = \frac{x}{x^2 + 4} \quad (i) f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad (j) f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$(k) f(x) = \frac{x^2}{2x + 5} \quad (l) f(x) = \frac{1}{x - 1} - x \quad (m) f(x) = e^x - x \quad (n) f(x) = \sqrt{|x^2 - 2|}$$

$$(o) f(x) = (x^3 - 4x^2 + 4x)e^{-x} \quad (p) f(x) = \frac{1 + |\ln(x)|}{1 + |x|} \quad (q) f(x) = x^2 e^{\left(\frac{|x|-1}{x}\right)} \quad (r) f(x) = xe^{-x^2}$$

GABARITO

Exercício 1 e) $x = k\pi/6$, $k \in \mathbb{Z}$ g) $z = -1/2$

Exercício 2:

(a) -2 mín (global), -1 máx (local), 0 mín (local), 1 máx, (global).

(b) 0 e 2 mínimos (globais), 1 máx (local), 3 máx (global).

(c) 1 mín (global), $1/2$ máx (local), 2 máx (global).

(d) 2 mín (global), -1 mín (local), 0 máx, (global).

(f) -1 máx (local), 2 máx (global), 0 mín (global).

Exercício 3: $v = 112.5m \times 150m$

Exercício 4: $r = (10/3)cm$, $h = 5cm$.

Exercício 13: $I = (-\infty, 1]$, $(f^{-1})'(6) = (f^{-1})'(f(-1)) = -1/8$.

Exercício 16: $p = (-1, -1)$.

Exercício 17: $A = (-2, 4)$, $B = (1, 1)$ ou $(-1, 1)$.

Exercício 18: $v=3u/2$

1 Roteiro para esboço de gráficos

- Especificar o Domínio, discutir continuidade e derivabilidade (quantas vezes e onde).
- Discutir eventuais simetrias (par, ímpar, periódica).
- Calcular limites a $\pm\infty$, à fronteira do domínio, a pontos de descontinuidade (se houver!); discutir assíntotas (vert, horiz, oblíquas).
- Estudar sinal de f e raízes.
- Calcular f' . Procurar críticos, estudar sinal, eventuais limites interessantes.
- Encontrar máximos e mínimos locais.
- Colocar tudo isso no gráfico e fazer um primeiro esboço.
- Discutir máximos e mínimos globais
- VERIFICAR A COERÊNCIA DOS RESULTADOS!!!
- Calcular a derivada segunda, discutir a concavidade da função, encontrar os pontos de inflexão.
- Verificar de novo a coerência dos resultados e aperfeiçoar o gráfico com as informações da derivada segunda.