

1ª Lista de Exercícios de SMA-301 Cálculo 1

Eugenio Massa

Corpos, inf e sup, inequações, modulo...

Exercício 1 Resolva as inequações:

- a) $3x + 3 < x + 6$ b) $\frac{2x - 1}{x + 1} < 0$ c) $x(2x - 1)(x + 1) > 0$
d) $\frac{x - 3}{x^2 + 1} < 0$ e) $(2x - 1)(x^2 - 4) \leq 0$ f) $\frac{x^2 + x + 1}{x - 2} > 3$
g) $x^2 < r^2$, onde $r > 0$ é um real dado. h) $x^2 \geq r^2$, onde $r > 0$ é um real dado.
i) $x^3 - 1 > 0$ j) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 < 0$ k) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 \geq 0$

Exercício 2 Simplifique:

- a) $\frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$ b) $\frac{4x^2 - 9}{2x + 3}$ c) $\frac{\frac{1}{x^2} - 1}{x - 1}$ d) $\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{p}}{x - p}$
e) $\frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$ f) $\frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$ g) $\frac{(x+h)^2 - (x-h)^2}{h}$

Exercício 3 Resolva as inequações:

- a) $|2x - 1| < 3$ b) $|3x - 1| < \frac{1}{3}$ c) $|2x^2 - 1| < 1$ d) $|2x - 3| > 3$
e) $|2x - 3| \geq 4$ f) $|2x - 1| < x$ g) $|x + 1| < |2x - 1|$ h) $|x - 1| - |x + 2| > x$
i) $|x - 3| < x + 1$ j) $|x - 2| + |x - 1| > 1$
k) $|x^2 + |x| - 6| \geq 2$ l) $|x|x - 1| \geq 2$ m) $\sqrt[3]{|4 - x|(x^2 - x - 2)} > 0$
n) $x^2 + x \geq 2$ o!) $\sqrt{\frac{x^2 - x - 2}{8 - x}} \geq 1$ p!) $\sqrt{\frac{x^2 - x - 2}{8 - x}} \geq -1$

Exercício 4 Seja $a > 0$. Prove que: $|x| \geq a \iff x \leq -a$ ou $x \geq a$.

Exercício 5 Prove que: $|x + y| \geq |x| - |y|$.

Exercício 6 a) Determine $r > 0$ de modo que $(4 - r, r + 4) \subset (2, 5)$.

b) Sejam $a < b$ dois reais e $p \in (a, b)$. Determine r de modo que $(p - r, p + r) \subset (a, b)$.

Exercício 7 Verifique as identidades.

- (a) $x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$
(b) $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$
(c) $x^4 - a^4 = (x - a)(x^3 + ax^2 + a^2x + a^3)$
(d) Generalize.

Exercício 8 Verifique as identidades onde $x > 0$ e $y > 0$.

- (a) $x - y = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$
(b) $x - y = (\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^2y} + \sqrt[4]{xy^2} + \sqrt[4]{y^3})$
(c) Generalize

Estas equações serão bastante utilizadas para o cálculo de alguns limites.

Exercício 9 (*) Prove: se para todo $\epsilon > 0$, $|a - b| < \epsilon$, então $a = b$.

Este resultado é frequentemente utilizado em demonstrações matemáticas.

Exercício 10 A afirmação: para todo x real, $x \neq 2$,

$$\frac{x^2 + x + 1}{x - 2} > 3 \iff x^2 + x + 1 > 3(x - 2)$$

é falsa ou verdadeira? Justifique.

Exercício 11 A afirmação: quaisquer que sejam os reais x e y ,

$$x < y \iff x^2 < y^2$$

é falsa ou verdadeira? Justifique.

Exercício 12 A afirmação: "para todo real $x \geq 0$, $x \geq \sqrt{x}$ " é falsa ou verdadeira? Justifique.

GABARITO

Exercício 1 a) $\left\{x \in \mathbb{R} : x < \frac{3}{2}\right\}$; **b)** $\left\{x \in \mathbb{R} : -1 < x < \frac{1}{2}\right\}$; **c)** $\left\{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 0 \text{ ou } x > \frac{1}{2}\right\}$; **d)** $\{x \in \mathbb{R} : x < 3\}$;

e) $\left\{x \in \mathbb{R} : x \leq -2 \text{ ou } \frac{1}{2} \leq x \leq 2\right\}$;

f) $\{x \in \mathbb{R} : x > 2\}$; **g)** $\{x \in \mathbb{R} : -r < x < r\}$; **h)** $\{x \in \mathbb{R} : x \leq -r \text{ ou } x \geq r\}$; **i)** $\{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$; **j)** $\{x \in \mathbb{R} : x < -3 \text{ ou } -2 < x < -1\}$.

k) $\{x \in \mathbb{R} : -3 \leq x \leq -2 \text{ ou } x \geq 2\}$

Exercício 3 a) $-1 < x < 2$; **b)** $\frac{2}{9} < x < \frac{4}{9}$; **c)** $-1 < x < 1$ e $x \neq 0$; **d)** $x < 0$ ou $x > 3$; **e)** $x \leq -\frac{1}{2}$ ou $x \geq \frac{7}{2}$; **f)** $\frac{1}{3} < x < 1$;

g) $x < 0$ ou $x > 2$; **h)** $x < -\frac{1}{3}$; **i)** $x > 1$; **j)** $x < 1$ ou $x > 2$.

Exercício 10: FALSA

Exercício 11: FALSA

Exercício 12: FALSA