C1 Transformações lineares não limitadas

Sejam E, F esp.de Banach.

Definição C1.1 (Trans. lin. "não-limitada"). Uma **transformação linear "não-limitada" de E em F** é uma transformação linear $T : D(T) \to F$, onde $D(T)$ é um subespaço de E.
Chamamos

- $D(T)$ é o Domínio de T,
- $G(T) = \{(x, Tx) \in E \times F : x \in D(T)\} \subseteq E \times F$ é o Gráfico de T,
- $R(T) = \{Tx \in F : x \in D(T)\} \subseteq F$ é a Imagem (Range) de T,
- $N(T) = \{x \in D(T) : Tx = 0\}$ é o Núcleo de T.

T é dita

- densamente definida se $D(T)$ é denso em E.
- limitada se $\exists\ c \geq 0$ tal que $\|Tx\|_F \leq c\|x\|_E,\ \forall x \in D(T)$.
- fechada se $G(T)$ é fechado em $E \times F$
- fechável se $\overline{G(T)}$ é o gráfico de uma transformação linear

★

Comparação:

- $T \in \mathcal{L}_?(E, F)$ fechada se $G(T)$ é fechado:
  - se $E \times F \ni (x_n, T(x_n)) \to (x, y) \in E \times F$ então $y = Tx$
  - equiv se $E \times F \ni (x_n, T(x_n)) \to (0, y) \in E \times F$ então $y = 0$
- T não-limitada fechada se $G(T)$ é fechado em $E \times F$:
  - se $D(T) \times F \ni (x_n, T(x_n)) \to (x, y) \in E \times F$ então $x \in D(T)$ e $y = Tx$
- T não limitada é fechável se $\overline{G(T)}^{E \times F}$ é o gráfico de uma transformação linear:
  - se $D(T) \times F \ni (x_n, T(x_n)) \to (x, y) \in E \times F$ e $D(T) \times F \ni (x'_n, T(x'_n)) \to (x, y') \in E \times F$ então $y = y'$
  - equiv se $(x_n, T(x_n)) \to (0, y) \in E \times F$ então $y = 0$

Estaremos interessados principalmente em transformações lineares densamente definidas e fechadas/fecháveis.

Observação. Se T é limitada e densamente definida, podemos estendê-la a uma transformação linear limitada em E. (Neste caso, se $D(T) \neq E$, T não é fechada). ★

Observação. O Teorema da aplicação aberta e algumas suas consequências se estendem ao caso de T fechado:

Aplic. aberta para T fechada

Sejam E e F espaços de Banach, $T : D(T)_{\subseteq E} \to F$ fechada.

- se T é sobrejetora, então T é aberta (se A é um aberto de E então $T(A \cap D(T))$ é aberto).[TL80, p.212]
  Além disso, existe $C > 0$ tal que para cada $y \in F$ pode-se encontrar $x \in D(T)$ tal que
  $$\|x\| \leq C\|y\| \quad \text{e} \quad y = Tx.$$
- se T é bijetora, então $T^{-1} \in L(F, E)$.

Exercícios

Exercício.
- Considere $T : (c_{00}, \| \|_1) \to \ell_1 : (x_i) \mapsto (ix_i)$
  é bem definido? limitado? contínuo? fechado? fechável?
- Considere $T : c_{00\ \subseteq \ell_1} \to \ell_1 : (x_i) \mapsto (ix_i)$
  é limitado? densamente definido? fechado? fechável (se sim descreva o fecho dele)?
- Considere $T : c_{00\ \subseteq \ell_1} \to \mathbb{K} : (x_i) \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} x_i$
  é limitado? contínuo? fechado? fechável(se sim descreva o fecho dele)?
- Considere $T : c_{00\ \subseteq (c_0, \| \|_\infty)} \to \mathbb{K} : (x_i) \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} x_i$
  é limitado? contínuo? fechado? fechável(se sim descreva o fecho dele)? ★

C2 Adjunto

Definição C2.1 (Adjunto (de contínuo)). Sejam E, F espaços de Banach e $T \in L(E,F)$.

Definimos o **adjunto de T** como $T^* : F^* \to E^* : \phi \mapsto \phi \circ T$ ★

Definição C2.2 (Adjunto (de não-limitado)). Sejam E, F espaços de Banach e $T : D(T)_{\subseteq E} \to F$ uma *transformação linear densamente definida*. Definimos o **adjunto de T** como $T^* : D(T^*) \to E^* : \phi \mapsto \overline{\phi \circ T}$ onde

$$D(T^*) = \{\phi \in F^* : \phi \circ T : D(T) \to \mathbb{K} \text{ é limitada}\} \subseteq F^*.$$

e $\overline{\phi \circ T}$ é a única extensão (por continuidade) de $\phi \circ T$ a um funcional linear contínuo em E. ★

Vale então

$$\boxed{\langle T^*\phi, x\rangle_{E^*,E} = (T^*\phi)(x) = \phi(Tx) = \langle \phi, Tx\rangle_{F^*,F} \quad \forall \ \ x \in D(T),\ \phi \in D(T^*).}$$

Teorema C2.3. *Seja $T : D(T)_{\subseteq E} \to F$ uma transformação linear densamente definida (E, F Banach). Então*

- *T^* é linear e fechado.*
- *Se T é fechado então*
  - *$D(T^*)$ separa os pontos de F.*
  - *Se F é reflexivo então $D(T^*)$ é denso em F^*.*
- *Se $T \in L(E,F)$ então $T^* \in L(F^*, E^*)$ e $\|T\| = \|T^*\|$.* ◁

Exercícios

Exercício. Calcule o adjunto dos operadores

1. $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : x \mapsto Ax$ sendo A uma matriz $m \times n$
2. $T : D(T)_{\subseteq \ell_1} \to \ell_1 : (x_j) \mapsto (2^{-j} x_j)$
3. $T : D(T)_{\subseteq \ell_1} \to \ell_1 : (x_j) \mapsto (x_{j+1} + x_j)$
4. $T : D(T)_{\subseteq \ell_1} \to \ell_1 : (x_1, x_2, x_3, ..) \mapsto (0, x_1, x_2, x_3, ..)$
5. $T : D(T)_{\subseteq \ell_3} \to \ell_2 : x \mapsto 2x$
6. $T : D(T)_{\subseteq \ell_2} \to \ell_3 : x \mapsto 2x$ ★

Exercício. Dados $S \in L(E;F)$, $T \in L(F;G)$, prove que $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$. Deduza que se T é um isomorfismo topológico (resp. isomorfismo isométrico), então T^* isomorfismo topológico (resp. isomorfismo isométrico). ★

C3 Relações de Ortogonalidade

Seja E um e.v.n, $M \subseteq E$ e $N \subseteq E^*$. Definimos os **ortogonais**[1]

$$M^{\perp} = \{f \in E^* : f(x) = 0, \quad \forall x \in M\}$$

$$N^{\perp\!\!\!\!\perp} = \{x \in E : f(x) = 0, \quad \forall f \in N\}.$$

Proposição C3.1.

- *$M^{\perp}$, $N^{\perp\!\!\!\!\perp}$ são subsepaços fechados (de E^* e de E resp.)*
- *se M, N são subespaços (de E e de E^* resp.), então vale*

$$(M^{\perp})^{\perp\!\!\!\!\perp} = \overline{M} \qquad (N^{\perp\!\!\!\!\perp})^{\perp} \supset \overline{N}$$

(se E é reflexivo então $(N^{\perp\!\!\!\!\perp})^{\perp} = \overline{N}$)

$\triangleleft$

Exercícios

Exercício. Faça o exercício 1.16 (p. 24) do [Bre11] ★

Exercício. Se M_1, M_2 são subespaços vetoriais do e.v.n. E com $M_1 \subseteq M_2$ e N_1, N_2 subespaços vetoriais de E^* com $N_1 \subseteq N_2$, então $M_2^{\perp} \subseteq M_1^{\perp}$ e $N_2^{\perp\!\!\!\!\perp} \subseteq N_1^{\perp\!\!\!\!\perp}$. ★

Exercício. Mostre que, se M é subespaço de E

$$M^{\perp} = \{0\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \overline{M} = E$$

Mostre que o mesmo não vale pra $N^{\perp\!\!\!\!\perp}$ e E^*. ★

Exercício. Sejam Y e Z subespaços vetoriais fechados do e.v.n. E, então

$$Y \cap Z = (Y^{\perp} + Z^{\perp})^{\perp\!\!\!\!\perp}, \tag{C3.1}$$

$$Y^{\perp} \cap Z^{\perp} = (Y + Z)^{\perp}, \tag{C3.2}$$

$$(Y \cap Z)^{\perp} \supseteq \overline{Y^{\perp} + Z^{\perp}}, \qquad (Y^{\perp} \cap Z^{\perp})^{\perp\!\!\!\!\perp} = \overline{Y + Z}. \tag{C3.3}$$

[1] A notação mais comum é $N^{\perp}$.

Os gráficos de T e T^* estão ligados por uma **relação de ortogonalidade** simples.

Proposição C3.2. *Sejam E, F espaços de Banach e $T : D(T)_{\subseteq E} \to F$ uma transformação linear densamente definida. Seja $\mathcal{J} : F^* \times E^* \to E^* \times F^* : (\psi, \phi) \mapsto (-\phi, \psi)$ então,*

$$G(T)^\perp = \{(-T^*\psi, \psi) : \ \psi \in F^*\} = \mathcal{J}(G(T^*)) \qquad \triangleleft$$

Teorema C3.3. *Seja $T : D(T)_{\subseteq E} \to F$ densamente definido. Então*

i)* $N(T) \subseteq R(T^*)^{\overset{*}{\perp}}$

ii) $\boxed{N(T^*) = R(T)^\perp}$ *e logo* *iv)* $\boxed{N(T^*)^{\overset{*}{\perp}} = \overline{R(T)}}$

Se T é também fechado então

i) $\boxed{N(T) = R(T^*)^{\overset{*}{\perp}}}$ *e logo* *iii)* $\boxed{N(T)^\perp \supseteq \overline{R(T^*)}}$

(se E é reflexivo então $N(T)^\perp = \overline{R(T^*)}$) $\triangleleft$

Corolário C3.4. *Nas condições acima, vale*

$$T \text{ sobre} \implies T^* \text{ inj} \tag{C3.4}$$
$$T^* \text{ sobre} \implies T \text{ inj} \tag{C3.5}$$

Se E ou F tem dimensão finita, então valem as reciprocas $\triangleleft$

C3.1 Caracterização de Transformações Lineares com Imagem Fechada

Teorema C3.5. *Seja T linear fechada e densamente definida. Então, são equivalentes:* [[TL80, p...240..][Rud73, p...96..]]

i) $R(T)$ *é fechada*

ii) $R(T^*)$ *é fechada*

iii) $R(T) = N(T^*)^{\overset{*}{\perp}}$

iv) $R(T^*) = N(T)^\perp$ $\triangleleft$

Lema C3.6. *Seja $T : D(T)_{\subseteq E} \to F$ densamente definido e fechado. Se existe $C > 0$ tal que*

$$\|\phi\| \leq C\|T^*\phi\| \quad \forall\, \phi \in D(T^*),$$

então T é aberta e logo sobrejetora. ◁

C4 Exercícios

Exercícios

Exercício. Reveja os exercícios 2.22 e 2.23 (p.53) do [Bre11] ★

Exercício (EC1). Considere as aplicações $T : D(T)_{\subseteq E} \to F : x \mapsto x$ pegando como E, F todas as possíveis combinações de c_0 e ℓ_p (com $1 \leq p \leq \infty$).
• Defina apropriadamente $D(T)$, encontre $R(T)$, discuta se a mapa for inj e/ou sobre, continua, fechada, densamente definida
• Defina apropriadamente T^* e $D(T^*)$, repita a discussão acima para T^* ★

Exercício (EC2). Considere as aplicações $T : E \to F$

1. $T : \ell_2 \to \ell_2 : (x_j) \mapsto (2^{-j}x_j)$
2. $T : \ell_1 \to \ell_2 : (x_j) \mapsto (2^{-j}x_j)$
3. $T : \ell_2 \to \ell_2 : (x_1, x_2, x_3, ..) \mapsto (0, x_2, x_3, ..)$
4. $T : \ell_2 \to \ell_2 : (x_1, x_2, x_3, ..) \mapsto (0, x_1, x_2, x_3, ..)$
5. $T : \ell_2 \to \ell_2 : (x_1, x_2, x_3, ..) \mapsto (x_2, x_3, ..)$

Encontre entre elas exemplos de

- $R(T) = F$, $R(T) \neq F$, $R(T)$ fechada/não fechada
- $R(T^*) = E^*$, $R(T^*) \neq E^*$, $R(T^*)$ fechada/não fechada
- T injetora/não injetora,
- $\sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|$ finito ou infinito
- $\sup_{\|Tx\| \leq 1} \|x\|$ finito ou infinito
- casos em que $T = T^*$ ou não. ★

Exercício. Mostre que a aplicação $T : E \to E : (x_i) \mapsto (x_i/i)$ fornece um exemplo de:

- afirmação (iii) do Teorema C3.3 com inclusão estrita, se $E = \ell_1$;
- reciprocas do corolário C3.4 falsas, se $E = \ell_2$.

★

Exercício. Seja $T : D(T)_{\subseteq E} \to F$ densamente definido e fechado.

- Mostre que se existe $C > 0$ tal que
$$\|\phi\| \leq C\|T^*\phi\| \quad \forall\, \phi \in D(T^*), \tag{C4.1}$$
(como nas hipóteses do lema C3.6), pode-se mostrar diretamente que T^* é injetora e sua imagem é fechada (note que pelo Teorema C3.5 isso implica T sobrejetora).
- Mostre que, analogamente, se tivermos que existe $C > 0$ tal que
$$\|x\| \leq C\|Tx\| \quad \forall\, x \in D(T), \tag{C4.2}$$
então T é injetora, sua imagem é fechada e T^* é sobrejetora.
- Mostre enfim que a desigualdade (C4.1) (resp. (C4.2)) pode ser obtida quando T (resp. T^*) é sobrejetora, aplicando o corolário B5.7 (resp. B5.8) ao conjunto $\{\phi \in D(T^*) : \|T^*\phi\| \leq 1\}$ (resp. $\{x \in D(T) : \|Tx\| \leq 1\}$),

★

Referências

[Bre11] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Universitext. Springer, New York, 2011, pp. xiv+599. ISBN: 978-0-387-70913-0.

[Rud73] W. Rudin. *Functional analysis.* McGraw-Hill Series in Higher Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York-Düsseldorf-Johannesburg, 1973, pp. xiii+397.

[TL80] A. E. Taylor e D. C. Lay. *Introduction to functional analysis.* Second. John Wiley & Sons, New York-Chichester-Brisbane, 1980, pp. xi+467. ISBN: 0-471-84646-5.

Lista dos teoremas

Lista dos exercícios