H1 Operadores compactos

Definição H1.1. Sejam E e F espaços de Banach e $T \in L(E, F)$.

- T é dito de posto finito se sua imagem tem dimensão finita.
- T é dito **compacto** se $T(\overline{B_E})$ é precompacto (na topologia forte).

> equivale (sendo em espaços métricos) a:
> se x_n é limitada então Tx_n possui uma subsequência convergente.

Denotamos por $K(E, F)$ e $L_f(E, F)$ os espaços dos operadores compactos (resp, de posto finito), de E em F.[1] ★

Proposição H1.2. *$K(E, F)$ é um subespaço vetorial fechado de $L(E, F)$.* ◁

Corolário H1.3. *Se $\{T_n\} \subseteq L_f(E, F)$ e $T \in L(E, F)$ são tais que $T_n \to T$ in $L(E, F)$, então $T \in K(E, F)$.* ◁

Proposição H1.4. *Se $T \in K(E, F)$ e F é um espaço de Hilbert, então existe uma sequência $\{T_n\} \subseteq L_f(E, F)$ tal que $T_n \to T$.* [a] ◁

[a] Mais em geral, a afirmação vale se F é de Banach e possui uma base de Schauder

Proposição H1.5. *(ex 6.7 do [Bre11]) Se $T \in L(E, F)$ então*

- *T compacto implica "$x_n \rightharpoonup x$ implica $Tx_n \to Tx$"*
- *se E é reflexivo e "$x_n \rightharpoonup x$ implica $Tx_n \to Tx$" então T é compacto*
- *T é de posto finito se e só se é contínuo de E_σ em F_τ.* ◁

Teorema H1.6. *$T \in K(E, F)$ se, e somente se, $T^* \in K(F^*, E^*)$.* ◁

[1] Escrevemos $K(E) = K(E, E)$.

Exercícios

Exercício. Mostre que $T \circ S$ é compacto sempre que T, S são lineares e contínuos e um deles é compacto ★

Exercício. Faça os exercícios 6.1, 6.2 (use o Teorema D1.10), 6.3, 6.4, 6.5, 6.6 (use o sistema de Rademacher, ex 5.32) e 6.7(pontos 1,2,4) e 6.8 (p. 170...) do [Bre11]. ★

Exercício. Faça os exercícios 6.12 e 6.13 (p. 173...) do [Bre11]. ★

Exercício. Considere o operador $T : L^2[0,1] \to L^2[0,1] : f \mapsto g(x) = \int_0^1 h(x,y) f(y)\, dy$ onde $h \in L^2([0,1]^2)$. Mostre que o operador é bem definido e compacto ★

Exemplo H1.7.

- $T : \ell_p \to \ell_p : (x_i) \mapsto (x_i/i)$ é compacto (veja ex 6.1 do [Bre11])
- $T : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1]) : f \mapsto \int_0^t f$ é compacto (veja ex 6.2 do [Bre11])
- se $V = \{x \in \ell_2 : \sum i x_i^2 < \infty\}$ com a norma $\|x\|_V^2 = \sum i x_i^2$ então $T : V \to \ell_2 : x \mapsto x$ é compacto (veja ex 6.5 do [Bre11]).
  Analogamente $T : \ell_2 \to W : x \mapsto x$ com $W = \{x \text{ seq. : } \sum x_i^2/i < \infty\}$ com a norma $\|x\|_W^2 = \sum x_i^2/i$

  Neste caso dizemos que $V \subseteq \ell_2 \subseteq W$ com inclusão compacta
- a inclusão de ℓ_p em ℓ_q $(p < q)$ não é compacta (apenas contínua)
- a inclusão de $L^p(0,1)$ em $L^q(0,1)$ $(p > q)$ não é compacta (apenas contínua). (veja ex 6.6 do [Bre11]).

★

H2 A Teoria de Riesz-Fredhohm

Lembrete

- Se $T \in L(E, F)$ (espaços de Banach) então (veja seção C3)
  - $N(T^*) = R(T)^{\perp}$, $\quad N(T^*)^{\perp\!\!\!\!*} = \overline{R(T)}$
  - $N(T) = R(T^*)^{\perp\!\!\!\!*}$, $\quad N(T)^{\perp} \supseteq \overline{R(T^*)}$
  - são equivalentes:

    i) $R(T)$ é fechada

    ii) $R(T^*)$ é fechada
- Em um esp. de Banach E (veja seção B7)
  um subespaço M de dimensão finita (ou fechado e de codimensão finita) sempre possue um complemento topológico N. Logo para todo $z \in E$, existem únicos $x \in M$, $y \in N$ tais que $z = x + y$, além disso, $z \mapsto (x, y)$ é linear e contínua.

Teorema H2.1 [Alternativa de Fredholm]. *Se E é um espaço de Banach e $T \in K(E)$, então*

a) $\dim(N(I - T)) < \infty$,

b) *$R(I - T)$ é fechada e portanto $R(I - T) = N(I - T^*)^{\perp}$,*

c) *Se $N(I - T) = \{0\}$ se, e somente se, $R(I - T) = E$,*

d) $\dim(N(I - T)) = \dim(N(I - T^*)) = n$.

$\triangleleft$

A "Alternativa" seria entre (mutuamente exclusivas)

(1) $I - T$ é sobre, ou seja, a equação $(I - T)x = y$ tem solução para todo $y \in E$

(2) $I - T$ não é injetora, ou seja, a equação $(I - T)x = 0$ tem solução não trivial

Além disso, no caso (1) a solução é única, no caso (2) y pertence a imagem se satisfaz n condições lineares.

Lema H2.2. *Seja E um espaço de Banach, $G \subseteq E^*$ subespaço de dimensão finita n, então $G^\perp$ possui complemento topológico de dimensão n.* $\triangleleft$

Exercícios

Exercício (EH1)**.** Considere o operador compacto $K : \ell_p \to \ell_p : (x_i) \mapsto (\lambda_i x_i)$ com $\lambda_i \to 0$
Verifique que ele satisfaz todas as afirmações do Teorema (encontre $N(I-T)$, $R(I-T)$ e explicite suas dimensões)
Faça o mesmo com os dois operadores (compactos?) obtidos compondo K com o operador de translação a direita e a esquerda, respectivamente. ★

Exercício (EH2)**.** Considere o operador compacto do exercício (6.2-3) do [Bre11]: encontre $N(I-T)$ e $R(I-T)$. ★

H3 Espectro de Um Operador

Definição H3.1. Seja E um espaço de Banach e $T : D(T) \subset E \to E$ um operador linear fechado.

- o **resolvente** de T é o conjunto

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - T) : D(T) \to E \text{ é bijetora } \}$$

  – Se $\lambda \in \rho(T)$ o operador $(\lambda I - T)^{-1}$ é contínuo e é dito *operador resolvente de T em λ*.

- o **espectro** de T é o conjunto $\sigma(T) = \mathbb{C} \backslash \rho(T)$.

  O espectro divide-se em:

  a) O **espetro pontual** $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \; N(\lambda I - T) \neq \{0\}\}$ [a]
     Se $\lambda \in \sigma_p(T)$,
     * λ é dito **autovalor de T**,
     * $N(\lambda I - T)$ é dito **autoespaço de T** (correspondente a λ)
     * $x \in N(\lambda I - T) \setminus \{0\}$ é dito **autovetor de T** (correspondente a λ)

  b) O **espectro contínuo**
     $\sigma_c(T) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}\colon N(\lambda I - T) = \{0\},\; R(\lambda I - T) \neq \overline{R(\lambda I - T)} = E\right\}$

  c) O **espetro residual**
     $\sigma_r(T) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \; N(\lambda I - T) = \{0\}, \overline{R(\lambda I - T)} \neq E\right\}$ ★

[a] [Bre11] denota σ_p por EV (eigenvalues).

Proposição H3.2. *$\rho(T)$ é aberto e $\sigma(T)$ é fechado, em $\mathbb{C}$.*
Em particular, se $T \in L(E, E)$, então $\sigma(T)$ é compacto e

$$\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|T\|\}. \quad \lhd$$

Proposição H3.3. *Se $x \in N(\lambda I - T)$ e $\phi \in N(\mu I - T^*)$ com $\lambda \neq \mu$ então $\langle \phi, x\rangle = 0$.*
Ou seja, $N(\lambda I - T) \subseteq N(\mu I - T^*)^\perp$ e $N(\lambda I - T^*) \subseteq N(\mu I - T)^\perp$. $\lhd$

Exemplo H3.4. Considere os operadores em ℓ_2
$S_r : (x_1, x_2, x_3..) \mapsto (0, x_1, x_2, ..)$
$S_l : (x_1, x_2, x_3..) \mapsto (x_2, x_3, x_4, ..)$
$T : (x_i) \mapsto (x_i/i)$
mostre que 0 pertence, respectivamente, a σ_r, σ_p, σ_c. ★

Exercícios

Exercício. Faça o exercício 6.14 (p. 174) do [Bre11]
Mostre que se $0 \in \rho(T)$ então $\sigma(T^{-1}) = 1/\sigma(T)$. ★

Exercícios

Exercício. Faça o exercício 6.17, 6.18(exceto ponto 11) e 6.19 (p. 175...) do [Bre11]

★

H3.1 Espectro do operador compacto

Teorema H3.5. *Se E é um espaço de Banach de dimensão infinita e $T \in K(E)$, então*

a) $0 \in \sigma(T)$,

b) $\sigma(T)\backslash\{0\} = \sigma_p(T)\backslash\{0\}$,

c) $\sigma(T)\backslash\{0\}$ *pode ser*

1. $\emptyset$,
2. *finito,*
3. *uma sequência que tende a* 0.

d) os autoespaços correspondentes a autovalores não nulos são finitodimensionais

Em particular, se a sequência $\{\lambda_n\} \subseteq \sigma(T)\backslash\{0\}$ *converge e é injetora então converge a zero, isto é, todo ponto de* $\sigma(T)\backslash\{0\}$ *é isolado.* $\triangleleft$

Exercícios

Exercício. Construa um exemplo de operador compacto não nulo com, respectivamente, 0, um numero finito e um numero infinito de autovalores. Construa um exemplo de operador compacto com, respectivamente, $0 \in \sigma_p$, $0 \in \sigma_c$, $0 \in \sigma_r$.
(Use sequências). ★

H3.2 Operadores auto-adjuntos e seu espectro

Definição H3.6. Sejam H um espaço de Hilbert e $T \in L(H)$. Assim o adjunto $T^* \in L(H^*)$.
Seja $R : H \to H^*$ é o operador de Riesz, definido como $\langle Ry, x\rangle = (x, y)$.
Então definimos o **adjunto (Hilbertiano)** de T:

$$\overset{*}{T}: H \to H : x \mapsto R^{-1}T^*Rx \ :$$

assim $\overset{*}{T} \in L(H)$ e vale $\boxed{(\overset{*}{T}\, y, x) = (y, Tx) \quad \forall x, y \in H\,.}$ ★

Definição H3.7. $T \in L(H)$ é **auto-adjunto** se $\overset{*}{T} = T$; isto é,

$$(Ty, x) = (y, Tx), \quad \forall x, y \in H.$$

Vale então $(Tx, x) \in \mathbb{R}$. ★

Definimos a **imagem numérica de T**:

$$W(T) = \{(Tx, x) : \ x \in S_H\}\,.$$

Teorema H3.8. *(1) Seja $T \in L(H)$. Então, $\sigma(T) \subseteq \overline{W(T)}$.*

(2) Se T é também auto-adjunto, então $W(T) \subseteq [m_T, M_T] \subseteq \mathbb{R}$, onde $m_T = \inf W(T)$, $M_T = \sup W(T)$. Além disso,

- $m_T, M_T \in \sigma(T)$,
- $\|T\| = \max\{-m_T, M_T\}$,
- *autovetores correspondentes a autovalores distintos são ortogonais.*
- $H = N(\lambda I - T) \oplus \overline{R(\lambda I - T)}$, *logo* $\sigma_r(T) = \emptyset$ *[Fri70, p.218]*

◁

Corolário H3.9. *Seja $T \in L(H)$ auto adjunto tal que $\sigma(T) = \{0\}$. Então $T = 0$.* ◁

Exercícios

Exercício. Faça o exercício 6.24(pontos 1 e 2) (p. 178) do [Bre11] ★

H4 Decomposição Espectral de Operadores Compactos e Auto-Adjuntos

Teorema H4.1. *Sejam H um espaço de Hilbert separável e $T \in L(H)$ um operador compacto e auto adjunto. Então H admite uma base Hilbertiana formada por auto-vetores de T.*
Em particular, se $\{e_j\}$ é esta base, $T\left(\sum a_i e_i\right) = \sum \lambda_i a_i e_i$. ◁

Observação H4.2. O operador do ex 6.1 do [Bre11]:

$$T : \ell_2 \to \ell_2 : (x_i) \mapsto (\lambda_i x_i)$$

com $\lambda_i \to 0$ é o protótipo de todos os operadores compactos e autoadjuntos em espaços de Hilbert separáveis (de dimensão infinita).

Em dimensão finita, isso é o análogo do resultado que toda matriz hermitiana é diagonalizável.

Truncando a série, obtemos uma outra forma de aproximar T por $\{T_n\} \subseteq L_f(H)$. ★

Exercícios

Exercício (EH3). Considere o operador

$$T : L^2[0,\pi] \to L^2[0,\pi] : f \mapsto g(x) = \int_0^\pi h(x,y) f(y)\, dy$$

onde $h \in L^2([0,\pi]^2)$ (já vimos que é bem definido e compacto).
• Verifique que T é autoadjunto se $h(x,y) = \overline{h(y,x)}$.

Se $k(x,y) = \frac{1}{\pi} min\{x(\pi - y), y(\pi - x)\}$ então $g = Tf$ satisfaz (qtp) o problema

$$\begin{cases} -g'' = f & em\ (0,\pi)\,, \\ g(0) = g(\pi)\,. \end{cases}$$

Sabendo isso, encontre uma base de Hilbert para $L^2[0,\pi]$ feita de autovetores de T.
Note que $Tf = \lambda f$ implica (se $\lambda \neq 0$)

$$\begin{cases} -f'' = -\left(Tf\right)''/\lambda = \frac{1}{\lambda} f & em\ (0,\pi)\,, \\ f(0) = f(\pi)\,. \quad ★ \end{cases}$$

Referências

[Bre11] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011, pp. xiv+599. ISBN: 978-0-387-70913-0.

[Fri70] A. Friedman. *Foundations of modern analysis*. Holt, Rinehart e Winston, Inc., New York-Montreal, Que.-London, 1970, pp. vi+250.

Lista dos teoremas

Lista dos exercícios