A1 Esp. topológicos, métricos, normados

Espaço topológico: dupla (E, τ): E conjunto, τ **topología**: uma família de subconjuntos de E "abertos", tal que.

- $E, \emptyset \in \tau$
- se $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$ então $\bigcup A_i \in \tau$ (reuniões quaisquer)
- se $\{A_i\}_{i=1,..,n} \subseteq \tau$ então $\bigcap A_i \in \tau$ (interseções finitas)

Espaço métrico: dupla (E, d): E conjunto, d **métrica**:
$d : E \times E \to [0, \infty)$ tal que

- $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
- $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall\ x, y \in E$,
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, $\forall\ x, y, z \in E$.

Podemos tomar em E a *topologia induzida* pela métrica: a gerada pelas bolas abertas $B_\delta(x) = \{y \in E : \ d(x, y) < \delta\}$, onde $A \subseteq E$ é aberto se para todo $x \in A$ existe $r_x > 0$ tal que $B_{r_x}(x) \subset A$.

Espaço vetorial normado: dupla $(E, \|\ \|)$: E espaço vetorial [1],
$\|\ \|$ **norma**: uma função $\| \cdot \| : E \to [0, \infty)$ tal que

- $\|x\| \geq 0, \quad \forall x \in E$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall\, x, y \in E$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, x \in E.$
- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$

é dita norma e então $(E, \|.\|)$
Podemos tomar em E a *métrica induzida* pela norma $d(x, y) := \|x - y\|$, e a correspondente topologia.

Entre espaços topológicos podemos definir **continuidade** (de uma função), logo a mesma definição vale em e.m. e em e.v.n.

[1] Conjunto E com uma soma interna (comutativa, associativa, com neutro e inverso) e um produto externo com coeficientes num corpo $\mathbb{K}$ (associativo, distributivo e com identidade):

- $x + y = y + x, \quad (x + y) + z = x + (y + z), \quad \forall x, y, z \in E$
- $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x), \quad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x, \quad \forall\, x \in E, \quad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$
- $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, \quad \forall\, x, y \in E, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K}$
- $1x = x, \quad \forall\, x \in E.$

A1.1 Algumas definições e propriedades em esp. top./mét.[Fol99, p.13]

Num espaço topológico (E, τ) definimos

- $H \subset E$ é **fechado** se H^c é aberto.
- A união de todos os abertos contidos em G é chamada **interior de** G e é denotado por $\boxed{G'}$.
- A interseção de todos os fechados contendo G é o **fecho de** G e é denotado por $\boxed{\overline{G}}$.
- $G \subset E$ é denso em E se $\overline{G} = E$ e nunca-denso em E se $\overline{G}' = \emptyset$.
- E é separável se tem um subconjunto enumerável e denso.
- $C \subseteq E$ é dito **compacto** se toda cobertura aberta de C possui uma subcobertura finita.

  > se $C \subseteq \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i$ onde $\{A_i\} \subseteq \tau$ então existe un subconjunto finito de índices $I_0 \subseteq \mathcal{I}$ tal que $C \subseteq \bigcup_{i \in I_0} A_i$

Exercícios

Mostre as propriedades a seguir.

1. $(\overline{G})^c = (G^c)'$ e $\overline{G^c} = (G')^c$.
2. Se G é aberto e denso então G^c é nunca-denso.
   Se G é fechado e nunca-denso então G^c é denso.

Num espaço métrico (E, d) temos:

- **bola aberta** $B_r(x) = \{y \in E : d(x, y) < r\}$.
- **bola fechada** $\overline{B_r(x)} = \{y \in E : d(x, y) \leq r\}$.
- **esfera** $S_r(x) = \partial B_r(x) = \{y \in E : d(x, y) = r\}$.
- $G \subseteq E$ é **aberto** se para todo $x \in G$ existe $r_x > 0$ tal que $B_{r_x}(x) \subseteq G$.
- uma sequência $\{x_n\} \subset E$ é **convergente** com limite $x \in E$ se $d(x_n, x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. (Escrevemos $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ ou $\lim_{n\to\infty} x_n = x$) .
- $C \subseteq E$ é **compacto** se e só se toda sequência em C tem uma subsequência convergente a um ponto de C.

Exercícios

Num espaço métrico (E, d), mostre as propriedades a seguir.

1. G é fechado se e só se para toda sequência $\{x_n\} \subseteq G$ que converge a algum $x \in E$, vale $x \in G$.
2. $x \in G'$ se e só se existe $B_r(x) \subseteq G$.
3. São equivalentes:
   - $x \in \overline{G}$,
   - $B_r(x) \cap G \neq \emptyset$, $\forall r > 0$,
   - existe uma sequência $(x_n) \subseteq G$: $x_n \to x$.

A2 Completeza

Definição A2.1. Um esp. métrico (E, d) é **completo** se toda sequência $\{x_n\} \subseteq E$ de Cauchy converge a um ponto $x \in E$. ★

> Uma sequência $\{x_n\}$ em um espaço métrico (E, d) é dita **de Cauchy** se $d(x_n, x_m) \to 0$ quando $\min\{n, m\} \to \infty$:
>
> $$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \ n, m > N \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Exercícios

Exercício. Seja (E, d) um espaço métrico e $\{x_n\} \subset E$ uma sequência.
– se $\{x_n\}$ é convergente então é de Cauchy.
– se $\{x_n\}$ é de Cauchy e alguma sub-sequência dela é convergente, então a sequência inteira é convergente. ★

Exercício.

- Um subconjunto fechado de um espaço métrico completo é completo.
- Um subconjunto completo de um espaço métrico qualquer é fechado.

★

Exercício. Considere $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ e as métricas

$$d_I(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx, \qquad d_U(f, g) = \max_{x \in [0,1]} \{|f(x) - g(x)|\} .$$

Mostre que (E, d_I) não é completo e que (E, d_U) é completo. ★

A3 Contrações [Che01, p.176] [Car, p.17]

Teorema A3.1. *Seja (E, d) um espaço métrico completo e $f : E \to E$ uma contração. Então existe e é único um ponto fixo de f.* $\triangleleft$

> – f é **contração** se $\exists\, L < 1$: $d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y)\ \forall\, x, y \in E$ (em particular, F é Lipschitz contínua de constante L).
> – $x \in E$ é **ponto fixo** de f se $f(x) = x$

Observação A3.2. Podemos relaxar a hipótese pedindo apenas que alguma iterada f^n de f seja uma contração. ★

APLICAÇOES

É usada para provar o Teorema de existência e unicidade para Prob. de Cauchy em EDOs (Picard-Lindelöf)

Exercícios

Exercício. Mostre que se $f : \overline{B_r(p)} \to E$ é uma contração de constante $L < 1$, e além disso $d(p, f(p)) < (1 - L)r$ então f possui um único ponto fixo em $\overline{B_r(p)}$. ★

Exercício (EA1). Sejam $K : [0, 1] \times [0, 1] \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ e $g : [0, 1] \to \mathbb{K}$ funções contínuas dadas. Além disso, seja $K(s, t, w)$ Lipshitz contínua em w, uniformemente com respeito a s, t, ou seja, existe $L > 0 : |K(s, t, w) - K(s, t, v)| \leq L|w - v|$, $\forall s, t \in [0, 1]$. Encontre hipóteses sobre o parâmetro $\lambda \in \mathbb{K}$ para obter existência e unicidade da solução da equação integral.

$$f(t) - \lambda \int_0^1 K(s, t, f(s))ds = g(t), \quad t \in [0, 1].$$

★

A4 Baire

Seja (E, d) um espaço métrico,

Definição. Um conjunto $A \subset E$ é dito
de primeira Categoria em E (**magro em E**) se A é união enumerável de conjuntos nunca-densos,
de segunda Categoria em E (**não-magro em E**) em caso contrário. ★

> - $A \subset X$ é denso em X se $\overline{A} = X$ e nunca-denso em X se $\overline{A}' = \emptyset$.

Teorema A4.1 [das categorias de Baire]. *Todo espaço métrico completo é de segunda categoria nele mesmo.* [Car, prova:p.36] ◁

Proposição A4.2. *(E, d) é de segunda categoria nele mesmo é equivalente a*

- *em qualquer representação de E como união enumerável de conjuntos fechados, pelo menos um deles contém uma bola.*
- *toda interseção enumerável de abertos densos em E é não vazia*

Se (E, d) é esp. métrico completo, também vale que toda interseção enumerável de abertos densos em E é densa em E. ◁

A5 Esp. vet. normados, esp. de Banach

Sempre consideraremos esp. vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Definição. Um espaço vetorial normado que é completo com a métrica induzida pela norma é dito um **espaço de Banach**. ★

Teorema A5.1. *Todo espaço vetorial normado pode ser imerso (densamente) em um espaço de Banach (o seu completamento). O completamento é único a menos de isometrias.* [Car, prova:p.19..] [Muj, prova:p.23..] ◁

> **isometria**: $T : E \to F$: linear tal que $\|Tx\|_F = \|x\|_E\,, \quad \forall x \in E$

Duas normas em E, $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são **normas equivalentes** se existem $c, C > 0$ tais que

$$c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1 \quad \forall \;\; x \in E.$$

Elas induzem a mesma topologia.

Teorema A5.2. *Um espaço vetorial normado é completo $\Leftrightarrow$ toda série absolutamente convergente é convergente.* ◁

> Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é dita **convergente** em E se $\sum_{n=1}^{N} x_n \to x$ quando $N \to \infty$ e **absolutamente convergente** se $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ é convergente.

Em vista da estrutura de e.v.n. podemos definir

- $C \subset E$ é um conjunto **convexo**: se

$$tx + (1-t)y \in C \quad \text{para todo } x, y \in C \text{ e } t \in [0,1]$$

- $S \subset E$ é um **subespaço**: se

$$0 \in S, \quad x, y \in S \Longrightarrow x + y \in S, \quad x \in S \Longrightarrow \lambda x \in S \;\; \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

Exercícios

Exercício. Mostre que bolas abertas e fechadas e subespaços são conjuntos convexos. ★

Exercício. Mostre que

- Se S é um subespaço próprio de um e.v.n. E, então $S' = \emptyset$
- Se S é um subespaço fechado de um espaço de Banach então S é um espaço de Banach.
- Se E é um e.v.n. e $E = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i$ sendo S_i

★

Definição. Uma base de Hamel para um espaço vetorial E sobre o corpo $\mathbb{K}$, é um conjunto $B \subseteq E$ cujos elementos são linearmente independentes e tal que todo elemento de E é combinação linear (finita) de elementos de B:

> podemos escrever $B = \{x_i,\ i \in \mathcal{I}\}$: então cada $x \in E$ pode ser escrito (de modo único!), na forma
>
> $$x = \sum_{i \in \mathcal{J}_x} a_i x_i \qquad \text{com } \{a_i\}_{i \in \mathcal{J}_x} \subseteq \mathbb{K}$$
>
> onde $\mathcal{J}_x$ é um subconjunto **finito** de $\mathcal{I}$.

★

Teorema A5.3. *Todo e.v. possui uma base de Hamel*[Fri70, prova:p.131..] ◁

> **Lema de Zorn** *Se X é um conjunto parcialmente ordenado e todo subconjunto totalmente ordenado de X tem um limitante superior então X tem um elemento maximal.*
>
> > **Conjunto parcialmente ordenado**: com uma relação de ordem "$\preceq$"(reflexiva antisimétrica e transitiva) (reflexiva $x \preceq x$
> > antisimétrica $x \preceq y$ e $y \preceq x \implies x = y$
> > transitiva $x \preceq y$ e $y \preceq z \implies x \preceq z$)
> > **Conjunto totalmente ordenado**: com uma relação de ordem "$\preceq$" tal que dados x, y quaisquer $x \preceq y$ ou $y \preceq x$
> > **Limitante superior** de $Y \subseteq X$: $l \in X$ t.q. $y \preceq l$ para todo $y \in Y$.
> > $m \in X$ é **elemento maximal** de X: $x \in X$ e $m \preceq x \implies m = x$.
>
> São afirmações equivalentes (Princípios da teoria dos conjuntos)
> **Lema de Zorn**,
> **Princípio da Boa Ordenação**,
> **Princípio Maximal de Hausdorff**,

Axioma da Escolha

Fixada uma base de Hamel, podemos definir $|||\cdot|||_\infty : E \to \mathbb{R}$ por

$$|||x|||_\infty = \max_{i \in \mathcal{J}_x} |a_i| \qquad \text{quando } x = \textstyle\sum_{i \in \mathcal{J}_x} a_i x_i.$$

Corolário A5.4. *Todo e.v. pode ser normado* ◁

Definição. E tem **dimensão** $n \in \mathbb{N}$ se a base de Hamel tem n elementos E tem **dimensão infinita** se ela for infinita. ★

Exercícios

Exercício. Mostre que $|||\cdot|||_\infty$ define uma norma em E. ★

Exercício (EA2)**.** Mostre que $(E, |||\cdot|||_\infty)$ não pode ser completo se E tem dimensão infinita (construa uma série absolutamente convergente que não convirja!) ★

Exercícios

Exercício. Seja E um e.v.n. e suponha que existam F_n, $n \in \mathbb{N}$, subespaços fechados e próprios de E tais que $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Use o Teorema das categorias de Baire para mostrar que E não é Banach.
Use este resultado para provar as afirmações

- o espaço vetorial real P de todos os polinômios (de uma variável real com coeficientes em $\mathbb{R}$) não é completo com qualquer que seja a norma.
- Se B é uma base de Hamel de um espaço de Banach de dimensão infinita, então B não é enumerável. ★

A6 Exemplos uteis - Espaços de sequências [Muj, p.5]

Seja $x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathbb{K}$ e defina $\|x\|_\infty := \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j|$.

$$\boxed{\ell_\infty} = \{x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K} : \ \|x\|_\infty < \infty\} \tag{A6.1}$$

$$\boxed{c} = \{x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K} : \ x_j \text{ converge}\} \tag{A6.2}$$

$$\boxed{c_0} = \{x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K} : \ x_j \to 0\} \tag{A6.3}$$

$$\boxed{c_{00}} = \{x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K} : \ x_j \neq 0 \text{ para finitos índices}\} \tag{A6.4}$$

são espaços vetoriais e $\|x\|_\infty$ é uma norma neles.
$c_{00} \subset c_0 \subset c \subset \ell_\infty$

A6.1 Desigualdades de Hölder e Minkowski

Lema A6.1. *Sejam $a, b \geq 0$, $\lambda \in (0,1)$. Então:*

$$a^\lambda b^{(1-\lambda)} \leq \lambda a + (1-\lambda) b$$

com igualdade se e só se $a = b$. ◁

Lema A6.2 [Hölder]. *Sejam $p, q > 1$: $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então*

$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q \qquad \forall x, y \geq 0$$

$$\sum |\xi_j \eta_j| \leq \left(\sum |\xi_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum |\eta_j|^q\right)^{1/q}$$ ◁

Lema A6.3 [Minkowski]. *Seja $p \geq 1$. Então*

$$\left(\sum |\xi_j + \eta_j|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum |\xi_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum |\eta_j|^p\right)^{1/p}$$ ◁

Então para $p \in [1, \infty)$ definimos

$$\boxed{\ell_p} := \left\{x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \text{ sequência em } \mathbb{K} \ : \ \|x\|_p < \infty\right\} \tag{A6.5}$$

com a norma $\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^\infty |x_j|^p\right)^{1/p}$.

Teorema A6.4. *(sendo $\mathbb{K}$ completo) ℓ_p é Banach para $p \in [1, \infty]$.* $\triangleleft$

Observação A6.5. Com a mesma construção podemos considerar espaços de sequencias em E, sendo E um e.v.n: por exemplo

$$\boxed{\ell_p(E)} := \left\{ x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq E : \ \|x\|_p < \infty \right\} \tag{A6.6}$$

com a norma $\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|_E^p \right)^{1/p}$ (ou $\|x\|_\infty := \sup_{j \in \mathbb{N}} \|x_j\|_E$) ★

Também podemos considerar produtos de e.v.n: $\boxed{E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n}$ com a norma $\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|_{E_j}^p \right)^{1/p}$ (ou $\|x\|_\infty := \max_{j=1,..,n} \|x_j\|_{E_j}$)

Concluímos que se $E, E_1, .., E_n$ são Banach então $\ell_p(E)$ e $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ são Banach, em particular $\mathbb{K}^n$ é Banach (com todas as normas vistas)

Exercícios

Exercício. Prove que

- para $p \in [1, \infty)$, o fecho[a] de c_{00} em ℓ_p é ℓ_p
- o fecho[a] de c_{00} em ℓ_∞ é c_0.
- c_0 e c são fechados em ℓ_∞, logo são espaços de Banach com a norma infinito (note que $c, c_0 \not\subseteq \ell_p$ se $p < \infty$).
- c_{00} não é completo com nenhuma das normas vistas (é um subespaço não fechado)
- mostre que se $1 \leq p < q \leq \infty$ e $x \in \ell_p \cap \ell_q$ então $\|x\|_q \leq \|x\|_p$. Conclua que $\ell_p \subset \ell_q$. ★

[a] E' tabém o completamento

A6.2 Espaços de funções

Dado espaço de medida (completa) (Ω, Σ, μ) definimos

$$\boxed{\mathcal{L}_p(\Omega, \Sigma, \mu)} = \Big\{ f : \Omega \to \mathbb{K} \ mensuravel : \ \|f\|_p < \infty \Big\} \tag{A6.7}$$

onde $\boxed{\|f\|_p} := \begin{cases} \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{1/p} & se\ p \geq 1 \\ \|f\|_\infty := supess_{x\in\Omega} |f(x)| \end{cases}$

Lema A6.6 [Hölder]. *Sejam* $p, q > 1$*:* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
Se $f \in \mathcal{L}_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ *e* $g \in \mathcal{L}_q(\Omega, \Sigma, \mu)$ *então* $fg \in \mathcal{L}_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ *e*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \qquad \lhd$$

Lema A6.7 [Minkowski]. *Seja* $p \geq 1$*. Se* $f, g \in \mathcal{L}_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ *então* $f + g \in \mathcal{L}_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ *e*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \qquad \lhd$$

Se

$$\boxed{L_p(\Omega, \Sigma, \mu)} := \{[f] : \ f \in \mathcal{L}_p(\Omega, \Sigma, \mu)\} \tag{A6.8}$$

onde $[f]$ é a classe de equivalência de f com respeito à relação de equivalência "$f \sim g$ se $f = g$ q.t.p", então $\| \ \|_p$ é norma para L_p.

A7 Aplicações lineares

Sejam E, F e.v.n. sobre $\mathbb{K}$. Definimos

$$\mathcal{L}_?(E,F) = \{T : E \to F : \textit{linear}\}$$

Espaço das aplicações (transformações) lineares de E em F.

Definição.
$T \in \mathcal{L}_?(E,F)$ é **limitada** se $\exists\, c \geq 0$ tal que $\|Tx\|_F \leq c\|x\|_E$, $\forall x \in E$. ★

Proposição A7.1. *Se $T \in \mathcal{L}_?(E,F)$, são equivalentes:*

1. *T é contínua (uniformemente),*
2. *T é contínua em 0,*
3. *T é limitada.* ◁

Definimos [2]

$$\boxed{L(E,F)} = \{T : E \to F : \textit{linear e limitada}\}$$

$$\begin{aligned}\boxed{\|T\|_{L(E,F)}} &:= \inf\{c \geq 0 : \|Tx\| \leq c\|x\|,\ \forall\ x \in E\} \\ &= \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|\end{aligned} \tag{A7.1}$$

Proposição A7.2. *Se F é completo então $L(E,F)$ é completo.*
Em particular $E^* := L(E,\mathbb{K})$ (dito espaço dual de E) é sempre completo. ◁

Exercícios

Exercício. Mostre que (A7.1) é de fato uma norma, que as formulações em (A7.1) são equivalentes e que a definição de T limitada é equivalente a pedir que os sup em (A7.1) sejam finitos. ★

Exercício. Mostre que se $T \in L(E,F)$ e $S \in L(F,Z)$ então $S \circ T \in L(E,Z)$ e $\|S \circ T\| \leq \|S\|\ \|T\|$. ★

[2] Cuidado, a definição não é universal: em [Fol99], [Car07] e [Muj] a notação L é como aqui, mas em [Bre11] usa $\mathcal{L}$ para o conjunto das contínuas/limitadas.

Definição A7.3. Para e.v.n definimos

- **isomorfismo** (**topológico**): $T \in L(E,F)$ inversível com $T^{-1} \in L(F,E)$ logo $\exists\, c, C > 0 : c\|x\|_E \leq \|Tx\|_F \leq C\|x\|_E,\ \forall x \in E$.
- **mergulho** $T \in L(E,F)$ que é isomorfismo de E em $T(E)$
- um isomorfismo/mergulho é dito **isométrico** se $\|Tx\|_F = \|x\|_E\,,\quad \forall x \in E$

★

Teorema A7.4. *Todos os e.v.n. de dimensão n sobre $\mathbb{K}$ são topologicamente isomorfos entre si.* ◁

Corolário A7.5. *Os e.v.n. sobre $\mathbb{K}$ de dimensão n*

- *têm todas as normas equivalentes*
- *têm uma única topologia possível*
- *são todos Banach*
- *têm bolas fechadas sempre compactas (são* **localmente compactos***)*

> *Um espaço topológico (X,τ) é dito* **localmente compacto** *quando para todo $x \in X$ existe $A \in \tau$: $x \in A$ e $\overline{A}$ é compacto. Para e.v.n é equivalente a pedir que $\overline{B_1(0)}$ seja compacta.* ◁

Corolário A7.6. *Subespaços de dimensão finita de um e.v.n são fechados.* ◁

Exercícios

Exercício. Sejam E e F e.v.n. com $F \neq \{0\}$:

(i) Mostre que se E tem dimensão finita, então $L(E,F) = \mathcal{L}_?(E,F)$.

(ii) Mostre que se E tem dimensão infinita, então existe um funcional linear sobre E não limitado, ou seja, $L(E,F) \subsetneq \mathcal{L}_?(E,F)$ ★

Teorema A7.7 [Riesz]. *Seja E um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$ tal que $\bar{B}_1(0) = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ é compacta. Então E tem dimensão finita.* $\triangleleft$

Lema A7.8 [Lemma de Riesz]. *Seja E um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$ e $M \subsetneq E$ um subespaço vetorial fechado. Então, para cada $\theta \in (0, 1)$, existe $y \in E$ tal que $\|y\| = 1$ e $dist(y, M) \geq \theta$.* $\triangleleft$

Temos então que um e.v.n é localmente compacto se e só se tem dimensão finita.

Exercícios

Exercício. Mostre que se M tem dimensão finita então a desigualdade no Lema também é válida para $\theta = 1$.
Mostre que, em outros casos, ela não pode ser válida com $\theta = 1$ (contraexemplo em $\mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$ com $f(0) = 0$). ★

Exercício. Use o Teorema de Riesz para mostrar que se E é um e.v.n. de dimensão infinita e se $K \subset E$ é um compacto, então $K' = \emptyset$. ★

A8 Separabilidade

Um espaço métrico (E, d) é dito **separável** se existir um subconjunto enumerável $D \subseteq E$ que é denso em E.

Proposição A8.1. *Seja E um espaço métrico separável e $\emptyset \neq F \subset E$. Então F é separável.* $\lhd$

Proposição A8.2. *Se existe uma família não enumerável de abertos em E, não vazios e a 2 a 2 disjuntos, então E não é separável.* $\lhd$

Exercícios

Exercício. São separáveis

- $\mathbb{K}^n$ (separado por $\mathbb{Q}^n$ ou $\mathbb{Q}^{2n}$)
- ℓ_p com $1 \leq p < \infty$ (separados por $c_{00}(\mathbb{Q})$) e também c, c_0.
- também E^n, $\ell_p(E)$, $c(E)$, $c_0(E)$ se E é separável.
- $(C([a, b], \mathbb{R}), \| \ \|_U)$ (Teorema da Aproximação de Weierstrass)

ℓ_∞ não é separável. ★

Exercício. Sejam E um e.v.n, $\{x_n\}$ uma sequência em E e $M = [x_n]_{n\in\mathbb{N}}$ (combinações lineares (finitas) de elementos da sequência).
Mostre que se M é denso em E, então E é separável. ★

LEMBRETE:[Fol99, pag. 6]
– *card*(X) $\leq$ (*resp.* $=$ // *resp.* $\geq$) *card*(Y) significa que existe $f : X \to Y$ injetora (resp bijetora // , resp. sobrej.)
– X enumerável significa $card(X) \leq card(\mathbb{N})$,
– um produto cartesiano finito de enumeráveis é enumerável
– uma reunião enumerável de enumerãveis é enumerável
– $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ não é enumerável

A9 Outros exercícios

Definição A9.1. Seja E um espaço de Banach com $dimE = \infty$. Uma sequência $\{s_n\} \subseteq E$ é dita **base de Schauder** para E se para cada elemento $x \in E$ existir uma única sequência $\{a_n\} \subseteq \mathbb{K}$ tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n s_n$. ★

Exercícios

Exercício.

- Mostre que $e_i = (\delta_{i,j})_{j\in\mathbb{N}}$, $i \in \mathbb{N}$ é uma base de Schauder para ℓ_p para $1 \leq p < \infty$, para c_0, mas não para ℓ_∞.
- Encontre uma base de Schauder para c.
- Mostre que se E possui uma base de Schauder então é separável.

★

Referências

[Bre11] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011, pp. xiv+599. ISBN: 978-0-387-70913-0.

[Car] A. Carvalho. "SMA5826 Analise I". Em: *Notas de aula - ICMC - USP* ().

[Car07] A. Carvalho. "Notas A.N.C Analise II (2007)". Em: *Notas de aula - ICMC - USP* (2007).

[Che01] W. Cheney. *Analysis for applied mathematics*. Vol. 208. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2001, pp. viii+444. ISBN: 0-387-95279-9. DOI: 10.1007/978-1-4757-3559-8.

[Fol99] G. B. Folland. *Real analysis*. Second. Pure and Applied Mathematics (New York). Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999, pp. xvi+386. ISBN: 0-471-31716-0.

[Fri70] A. Friedman. *Foundations of modern analysis*. Holt, Rinehart e Winston, Inc., New York-Montreal, Que.-London, 1970, pp. vi+250.

[Muj] J. Mujica. "Notas de análise funcional". Em: *Notas de aula - IMECC - UNICAMP* ().

Lista dos teoremas

Lista dos exercícios