D1 Topologia fraca

Definição D1.1. Se τ_1, τ_2 são duas topologias no conjunto X, dizemos que τ_2 é mais fina que τ_1, se $\tau_1 \subseteq \tau_2$ (mais fina se tem mais abertos) ★

Definição D1.2. Se (X, τ) é um espaço topológico, $C \subseteq X$ é dito **compacto** se toda cobertura aberta de C possui uma subcobertura finita.

> se $C \subseteq \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i$ onde $\{A_i\} \subseteq \tau$ então existe un subconjunto finito de índices $I_0 \subseteq \mathcal{I}$ tal que $C \subseteq \bigcup_{i \in I_0} A_i$

Seja E um conjunto. Podemos definir em E uma topologia σ como sendo a menor topologia que contenha toda uma família de conjuntos $\mathcal{F}$.

A topologia toma a forma

$$\sigma = \left\{ \bigcup_{j \in \mathcal{J}} \bigcap_{i \in I_j} F_{i,j} : \ F_{i,j} \in \mathcal{F}, \ \mathcal{J} \text{ conjunto qualquer, } I_j \text{ conjuntos finitos} \right\}$$

(reuniões quaisquer de interseções finitas de elementos da família)

Em particular, se $x \in A \in \sigma$ existe um $B \in \sigma$ tal que $x \in B \subseteq A$, da forma

$$B = \bigcap_{i=1,..,N} F_i, \tag{D1.1}$$

onde $x \in F_i \in \mathcal{F}$ para $i = 1, .., N$: **os conjuntos da forma (D1.1) formam uma base de vizinhanças para x.**

Definição D1.3 (Topologia fraca)**.** Seja E um e.v.n. e $\boxed{\tau}$ sua **topologia forte**: a induzida pela norma. Definimos[1] em E a **topologia fraca**, denotada[2] por $\boxed{\sigma = \sigma(E, E^*)}$, tomando a família geradora

$$\mathcal{F} = \left\{\phi^{-1}(A) : \ \phi \in E^*, \ A \subseteq \mathbb{K} \text{ aberto}\right\} . \quad \bigstar$$

Desta forma todo $\phi \in E^*$ será ainda contínuo com respeito à topologia fraca:

A topologia fraca é a menos fina que preserve a continuidade dos $\phi \in E^*$

Outra **base de vizinhanças para** x é composta pelos conjuntos da forma

$$V_{\varepsilon,\phi_1,..,\phi_N}(x) := \{y \in E : \ |\phi_i(y - x)| < \varepsilon \ \forall i = 1, .., N\} \tag{D1.2}$$

onde $\varepsilon > 0$ e $\phi_i \in E^*$ para um número finito de $i = 1, .., N$.

Proposição D1.4. *Se $\{x_n\}$ é uma sequência em (E, σ), então $x_n \to x$ se, e somente se, $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$ $\forall \phi \in E^*$.* $\triangleleft$

Proposição D1.5. *Se (Z, Σ) é um espaço topológico e $\psi : (Z, \Sigma) \to (E, \sigma)$ é uma função então, ψ é contínua se, e somente se, $\varphi \circ \psi : Z \to \mathbb{K}$ é contínua $\forall \varphi \in E^*$.* $\triangleleft$

Proposição D1.6. *A topologia fraca $\sigma = \sigma(E, E^*)$*

- *é Hausdorff*
- *se E tem dimensão finita, coincide com à topologia forte τ.*
- *se E tem dimensão infinita,*
  - *é estritamente menos fina da topologia forte τ.*
    - *todo aberto de σ contém uma reta,*
    - *nenhuma bola é um aberto de σ*
  - *não pode ser metrizada* $\triangleleft$

[1] Denotaremos aqui, quando não der confusão, $E_\tau = (E, \tau)$ e $E_\sigma = (E, \sigma(E, E^*))$.
[2] Cuidado: a notação varia... em alguns livros muda a ordem.

Lema D1.7. *Se E é e.v.n e $\phi, \phi_1, .., \phi_n \in \mathcal{L}_?(E, \mathbb{K})$ com $\bigcap_{i=1,..,N} N(\phi_i) \subseteq N(\phi)$, então ϕ é combinação linear dos ϕ_i* $\triangleleft$

Exercícios

Exercício. Mostre que

$$
\begin{aligned}
+ :\ & E_\sigma \times E_\sigma \longrightarrow E_\sigma :\ (x, y) \mapsto x + y \\
\cdot :\ & \mathbb{K} \times E_\sigma \longrightarrow E_\sigma :\ (\lambda, x) \mapsto \lambda x
\end{aligned}
$$

são contínuas (use as bases de vizinhanças!) ★

Notação D1.8. Escreveremos

- $\boxed{x_n \rightharpoonup x}$ (x_n conv. fracamente a x) quando a convergência é na top. fraca,
- $\boxed{x_n \to x}$ (x_n conv. fortemente a x) quando a convergência é na top. forte ★

Proposição D1.9. *Seja $\{x_n\}$ uma sequência em E. Temos que:*

i) $x_n \rightharpoonup x \iff \phi(x_n) \to \phi(x) \quad \forall \quad \phi \in E^*$
ii) $x_n \to x \Longrightarrow x_n \rightharpoonup x$
iii) $x_n \rightharpoonup x \Longrightarrow \{\|x_n\|\}$ *é limitada e* $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$
iv) $x_n \rightharpoonup x$ *e* $\phi_n \to \phi$ *em* $E^* \Longrightarrow \phi_n(x_n) \to \phi(x)$. $\triangleleft$

Exercícios

Exercício. Mostre que, se $p \in (1, \infty)$, a sequência $e_n = (\delta_{i,n})$ converge fracamente mas não fortemente em ℓ_p.
O que pode dizer para os casos $p = 1$ e $p = \infty$?
O que pode dizer da sequência $c_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e_i$? ★

Teorema D1.10. *Sejam E e F e.v.n. e $T \in \mathcal{L}_?(E, F)$. São equivalentes as continuidades dos operadores*

$$
\begin{aligned}
T &: E_\tau \to F_\tau : x \mapsto Tx \\
T &: E_\sigma \to F_\sigma : x \mapsto Tx \\
T &: E_\tau \to F_\sigma : x \mapsto Tx
\end{aligned}
$$

$\triangleleft$

D1.1 Convexos na topologia fraca

Teorema D1.11 [**Mazur**]**.** *Se E é um e.v.n. e $C \subseteq E$ é convexo, são equivalentes:*

a) *C fechado na topologia forte*
b) *C fechado na topologia fraca*
c) *C coincide com a interseção de todos os semiespaços fechados que o contêm.*

$\triangleleft$

Corolário D1.12. *Se E tem dimensão infinta, então*

$$\overline{S^E}^{\sigma(E,E^*)} = \overline{B^E}^{\tau}$$

e logo S^E não é fechado na topologia fraca. $\triangleleft$

Definição D1.13. Dado um conjunto $A \subseteq E$, definimos **envoltória convexa** (ou convexificado) de A, denotado por $co(A)$: o menor convexo de E que contém A:

$$\boxed{\text{co(A)}} = \left\{ \sum_{i=1}^{N} \lambda_i a_i : \ N \in \mathbb{N}, \ \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1, \ \lambda_i \geq 0, \ a_i \in A \right\} \qquad \bigstar$$

Corolário D1.14. *Se $x_n \rightharpoonup x$ então existe uma sequência de combinações lineares convexas dos x_n que converge fortemente para x.* $\triangleleft$

D2 Topologias em E^*

Seja E^* o dual de um e.v.n, $\boxed{\tau}$ sua **topologia forte** (a induzida pela norma) e $\boxed{\sigma = \sigma(E^*, E^{**})}$ a **topologia fraca**.

Definimos[3] a **topologia fraca***, denotada por $\boxed{\sigma^* = \sigma(E^*, E)}$ Tomando a família geradora

$$\mathcal{F} = \left\{ (Jx)^{-1}(A) : \; x \in E, \; A \subseteq \mathbb{K} \text{ aberto} \right\} .$$

É imediato que $\sigma(E^*, E) = \sigma(E^*, E^{**})$ *se E é reflexivo, e nunca é mais fina.*

Uma **base de vizinhanças para ϕ** é composta pelos conjuntos da forma

$$V_{\varepsilon, x_1, .., x_N}(\phi) := \{ f \in E^* : \; |\phi(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon \; \forall i = 1, .., N \} \tag{D2.1}$$

onde $\varepsilon > 0$ e $x_i \in E$ para um número finito de $i = 1, .., N$.

Desta forma todo $\Phi \in J(E)$ será ainda contínuo com respeito à topologia fraca*.

Analogamente *toda mapa $\phi \mapsto \phi(x)$ (avaliação em x fixado) será contínua com respeito à topologia fraca**.

Proposição D2.1. *A topologia fraca** $\sigma^* = \sigma(E^*, E)$

- *é Hausdorff,*
- *se E^* tem dimensão finita, coincide com τ e com $\sigma(E^*, E^{**})$.*
- *se E é reflexivo, coincide com $\sigma(E^*, E^{**})$.*
- *se E não é reflexivo*
  - *é estritamente menos fina da topologia fraca $\sigma(E^*, E^{**})$.*
    Em particular $[\Phi = 0]$ é um (convexo) não fechado sempre que $\Phi \notin J(E)$.
  - *não pode ser metrizada* ◁

[3] Denotaremos aqui, quando não der confusão, $E^*_\tau = (E^*, \tau)$, $\quad E^*_\sigma = (E^*, \sigma(E^*, E^{**}))$, $E^*_{\sigma^*} = (E^*, \sigma(E^*, E))$.

Notação D2.2. Escreveremos $\boxed{f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f}$ (f_n converge fraco-estrela a f) quando a convergência é na topologia fraca* ★

Proposição D2.3. *Seja $\{f_n\}$ uma sequência em E^*. Temos que*

i) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \iff \langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle, \quad \forall x \in E.$

ii) Se $\|f_n - f\|_{E^*} \to 0$, *então* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *e se* $f_n \rightharpoonup f$, *então* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$.

iii) Se E é Banach e $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$, *então* $\{\|f_n\|\}$ *é limitada e* $\|f\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|$.

iv) Se E é Banach e $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *e* $x_n \to x$, *então* $f_n(x_n) \to f(x)$.

◁

Exercícios

Exercício. Prove a Proposição acima ★

Exercício. Considere a sequência $t_n = Tr^n(\mathbf{1}) = (1, .., 1, .0...)$ em l_∞. Mostre que ela não converge forte, converge fraco-estrela (mas não fraco) a $\mathbf{1}$ (e logo não converge fraco). ★

D3 Compacidade e Teorema de Banach-Alaoglu

Exercícios

Exercício. Mostre que em espaços topológicos

- se f é contínua e K é compacto então $f(K)$ é compacto
- K compacto implica K fechado (precisa Hausdorff: tome um ponto p no complementar e mostre que é interior construindo duas famílias de abertos $A_x \cap B_x = \emptyset$ com $\{A_x\}_{x \in K}$ que cobre K e $p \in B_x$ $\forall x \in K$ ...)
- se $F \subseteq K$ com F fechado e K compacto então F é compacto (adicionando F^c uma cobertura aberta de F cobre K ...)

★

O resultado mais importante, e principal motivação para a introdução das topologias fracas é o seguinte:

Teorema D3.1 [Banach-Alaoglu]. *Seja E um e.v.n. A bola $\overline{B_{E^*}} = \{f \in E^* : \|f\| \leq 1\}$ é compacta na topologia $\sigma(E^*, E)$.* ◁

A sua prova depende do Teorema de Tychonoff

Espaço e topologia produto, Teorema de Tychonoff

- Dada uma família de conjuntos $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$, o **produto cartesiano** da família é o conjunto

$$P = \boxed{\prod_{\alpha \in A} X_\alpha} := \{f : A \to \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha : f(\alpha) \in X_\alpha, \quad \forall \alpha \in A\}.$$
$$= \{x = (x_\alpha)_{\alpha \in A} : \ x_\alpha \in X_\alpha, \quad \forall \alpha \in A\}.$$

  Denotaremos este conjunto por X^A quando todos os conjuntos X_α são cópias de X.

- Sejam $\boxed{\pi_\beta} : \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \to X_\beta : x = (x_\alpha)_{\alpha \in A} \to x_\beta$ as *projeções* do produto em cada fator.

- Se cada X_α é dotado de uma topologia τ_α, podemos colocar em $\prod X_\alpha$ a **topologia produto** (denotada por $\boxed{\prod_{\alpha\in A}\tau_\alpha}$): gerada pela família

$$\mathcal{F} = \left\{\pi_\alpha^{-1}(U) : \ \alpha \in A, \ U \in \tau_\alpha\right\} .$$

  Uma **base de vizinhanças para** x é composta pelos conjuntos da forma

$$V_{\varepsilon,\alpha_1,..,\alpha_N}(x) := \left\{ y \in \prod X_\alpha : \ |x_{\alpha_i} - y_{\alpha_i}| < \varepsilon \ \forall i = 1,..,N \right\} \quad \text{(D3.1)}$$

  onde $\varepsilon > 0$ e $\alpha_i \in A$ para um número finito de $i = 1,..,N$.

Teorema D3.2 [Tychonoff]. *(Usa Axioma da Escolha!) Se cada* (X_α, τ_α) *é compacto então* $\left(\prod_{\alpha\in A} X_\alpha, \prod_{\alpha\in A}\tau_\alpha\right)$ *é compacto* $\lhd$

Passos da prova do Teorema D3.1.

- Seja $T : (E^*, \sigma^*) \to (\mathbb{K}^E, \prod \tau_{\mathbb{K}}) : \phi \mapsto (\phi(x))_{x\in E}$: é mergulho topológico
- vale $T(\overline{B^{E^*}}) \subseteq \prod_{x\in E} \overline{B^{\mathbb{K}}_{\|x\|}}$, o qual é um compacto.
- $T(\overline{B^{E^*}})$ é fechado, logo compacto.
- $\overline{B^{E^*}}$ é compacto na top. σ^*. $\square$

D4 Mais cosias..

Observação D4.1. Os Corolários B5.7 (resp. B5.8) podem ser reformulados concluindo que um conjunto limitado na topologia fraca* (resp. fraca) é fortemente limitado. ★

Exercícios

Exercício. Faça os exercícios 3.1,..,3.5 (p. 79...) do [Bre11] ★

Referências

[Bre11] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Universitext. Springer, New York, 2011, pp. xiv+599. ISBN: 978-0-387-70913-0.

Lista dos teoremas

Lista dos exercícios