F1 Medida e integração em três páginas

Tarefa

Leia a introdução do capítulo 4 e seção 4.1 (pag.89..91) do [Bre11].

Dado um conjunto Ω,

- uma **σ-álgebra** em Ω é uma família não vazia $\mathcal{M}$ de subconjuntos de Ω, fechada por complementação e por reunião enumerável (logo contém $\emptyset$, Ω e é fechada por interseções enum.).
  - Se X é um espaço topológico, a $\sigma-$álgebra $\mathcal{B}_X$ gerada pelos conjuntos abertos em X é chamada $\sigma-$álgebra de Borel em X.
- Uma **medida** é uma função $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ tal que[1]

  i) $\mu(\emptyset) = 0$.

  ii) $\mu\left(\coprod_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$.

  - a medida é
    - *completa*, se $E \subseteq F \in \mathcal{M}$ com $\mu(F) = 0$ implica $E \in \mathcal{M}$
    - *finita* se $\mu(\Omega) < \infty$
    - *σ-finita* se Ω é reun. enum. de conjuntos de medida finita
  - A medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^N$ é construída de forma que seja completa e que a medida dos (multi)retângulos seja sua área.
- uma função $f : (X, \mathcal{M}) \to (Y, \mathcal{N})$ é **mensurável** se $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$ para todo $E \in \mathcal{N}$.
  - Se $(Y, \mathcal{N})$ é $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, uma *condição equivalente* é $f^{-1}((a, \infty)) \in \mathcal{M}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
  - *mensurabilidade é preservada* por soma, produto, supremo pontual, limite pontual.

[1] Como consequência vale $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$ e também $A \subseteq B \Longrightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$.

- Uma função simples (a valores reais) é uma combinação linear finita de funções características de elementos de $\mathcal{M}$:

$$\phi = \sum_{j=1}^{N} a_j \mathcal{X}_{E_j} : \quad a_j \in \mathbb{R},\ E_j \in \mathcal{M}\,.$$

Funções mensuráveis podem ser aproximadas por funções simples.

- A **integral** (em Ω) de uma função mensurável f, com respeito à medida μ:

$$\int_\Omega f \, d\mu\,,$$

é definida[2] aproximando f por funções simples ϕ e definindo

$$\int_\Omega \phi \, d\mu = \sum_{j=1}^{N} a_j \mu(E_j)\,.$$

- Importante: *Funções Riemann-integráveis (em sentido próprio) são Lebesgue-integráveis e a integral coincide.*[3]

F1.1 Resultados importantes

Definição F1.1. Se f, g são mensuráveis, dizemos que $f = g$ quase toda parte (q.t.p.) [almost everywhere: a.e.] se $\mu(\{f \neq g\}) = 0$. Analogamente dizemos que uma propriedade acontece q.t.p se acontece exceto num conjunto de medida nula. ★

Teorema F1.2 [da Convergência Monótona]. *Se $\{f_n\}$ é uma sequência de funções mensuráveis tal que $0 \leq f_j \leq f_{j+1}$ q.t.p. para todo j, e $f = \lim_{n\to\infty} f_n (= \sup_{j\in\mathbb{N}} f_j)$, então*

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_j \, d\mu\,.$$

◁

[2] Precisa um pouco de cuidado: a definição é feita antes para funções não negativas, depois estendida a funções reais ou complexas separando $\Re e(f)^{\pm}$ e $\Im_m(f)^{\pm}$.

[3] As impróprias absolutamente integráveis podem ser definidas diretamente como integrais Lebesgue; as não abs.int. ainda precisam ser definidas por limite

Proposição F1.3. *Se $f \geq 0$ e mensurável,*

- $\int f\, d\mu = 0$ *se e somente se* $f = 0$ *q.t.p.*
- *se* $\int f\, d\mu < \infty$, *então* $\{x : f(x) = \infty\}$ *é um conjunto de medida nula* ($f < \infty$ *q.t.p.*) *e* $\{x : f(x) > 0\}$ *é* $\sigma-$*finito.*

$\triangleleft$

Lema F1.4 [de Fatou]. *Se $\{f_n\}$ é qualquer sequência de mensuráveis com $f_n \geq 0$, então*

$$\int (\liminf_{n\to\infty} f_n)\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu. \quad \triangleleft$$

Teorema F1.5 [da Convergência Dominada]. *Seja $\{f_n\}$ uma sequência em $L^1(\mu)$ tal que*
(a) $f_n \to f$ *q.t.p,*
(b) existe $g \in L^1(\mu)$ *tal que* $|f_n| \leq g$ *q.t.p. para todo* n.

Então $f \in L^1(\mu)$ *e*

$$\int f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\,. \qquad \triangleleft$$

F1.2 Produtos de medidas. Tonelli e Fubini.

É também possível definir produtos de medidas (no produto dos conjuntos) e calcular integrais no produto como integrais iteradas:

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f\, d(\mu\times\nu) &= \int_X \left[\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right] d\mu(x) \\ &= \int_Y \left[\int_X f(x,y)d\mu(x)\right] d\nu(y)\end{aligned} \tag{F1.1}$$

Em particular:

Teorema F1.6 [de Fubini-Tonelli]. *[Fol99, p.67]* *Suponha que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ são espaços de medida $\sigma-$finitos.*

a) (Tonelli) *Se $f : X \times Y \to [0, \infty]$ é mensurável, então as funções $g(x) = \int_Y f(x,y)d\nu(y)$ e $h(y) = \int_X f(x,y)d\mu(x)$ são mensuráveis e vale* (F1.1).

b) (Fubini) *Se* $f \in L^1(X \times Y)$, *então* $f(x, y) \in L^1(Y)$ *para quase todo* $x \in X$, $f(x, y) \in L^1(X)$ *para quase todo* $y \in Y$, *as funções definidas quase sempre* $g(x) = \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ *e* $h(y) = \int_X f(x, y) d\mu(x)$ *estão em* $L^1(X)$ *e* $L^1(Y)$, *respectivamente, e vale* (F1.1). ◁

F2 Algumas definições

Definição F2.1. Definimos a função de truncamento

$$T_n(z) = \frac{z}{|z|} \min\{n, |z|\}, \qquad n \in \mathbb{N};$$

Note que $T_n \circ f \to f$ pontualmente e $|T_n \circ f| \leq |f|$ ★

Definição F2.2. O **suporte** supp(f) de uma função $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ é o menor fechado F tal que $f \equiv 0|_{\Omega \setminus F}$.

Dizemos que f tem **suporte compacto** em Ω se existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que $f \equiv 0$ em $\Omega \setminus K$.

O espaço das funções contínuas a suporte compacto em Ω é indicado por $\boxed{\mathcal{C}_c(\Omega)}$ ★

F3 Espaços L^p

Lembrete (veja seção A6.2)

Dado espaço de medida (completa) (Ω, Σ, μ) definimos

$$\boxed{L^p(\Omega, \Sigma, \mu)} = \left\{[f]: \ f : \Omega \to \mathbb{K} \ mensuravel : \ \|f\|_p < \infty\right\} \tag{F3.1}$$

onde $[f]$ é a classe de equivalência de f com respeito à relação de equivalência "$f \sim g$ se $f = g$ q.t.p",

$$\boxed{\|f\|_p} := \begin{cases} \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{1/p} & se\ p \geq 1 \\ \|f\|_\infty := supess_{x\in\Omega} |f(x)| \end{cases}$$

é uma norma. ($supess_{x\in\Omega} f(x) := inf\{C \in \mathbb{R} : \ f \leq C \ q.t.p. \ em \ \Omega\}$).

Lema F3.1 [Hölder]. *Sejam $p, q > 1$: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \qquad \lhd$$

Lema F3.2 [Minkowski]. *Seja $p \geq 1$. Se $f, g \in L^p(\Omega)$ então $f + g \in L^p(\Omega)$ e*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \qquad \lhd$$

Observação F3.3. Podemos definir L^p também com $0 < p < 1$: é um espaço vetorial mas $\| \|_p$ não é uma norma.

De fato vale, para $a, b \geq 0$,

$$a^p + b^p \leq (a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p), \qquad p \in [1, \infty). \tag{F3.2}$$

$$2^{p-1}(a^p + b^p) \leq (a + b)^p \leq (a^p + b^p), \qquad p \in (0, 1) \tag{F3.3}$$

com desigualdades estritas se $a, b > 0$. ★

Observação F3.4 (Algumas obs. simples)**.**

- Se $\mu(\Omega) < \infty$ então $L^p(\Omega) \subseteq L^q(\Omega)$ para $1 \leq q < p \leq \infty$ (inclusão contínua: $\|f\|_q \leq \mu(\Omega)^{1/q-1/p} \|f\|_p$).
- Se μ é medida de contagem então $L^p(\Omega) \subseteq L^q(\Omega)$ para $1 \leq p < q \leq \infty$ (inclusão contínua). ★

Exercícios

Exercício. Prove que $\| \ \|_\infty$ é mesmo uma norma e que Hölder e Minkowski valem também com $q = 1, \ p = \infty$. ★

Exercício. Prove as desigualdades (F3.2)-(F3.3), calculando a imagem da função $\frac{(1+x)^p}{1+x^p}$ com $x \in [0, \infty)$ ★

Exercício. Prove as afirmações da Observação F3.4.
Prove com exemplos a necessidade da condição $\mu(\Omega) < \infty$ e que podem não valer as inclusões inversas . ($X \subseteq Y$ com inclusão contínua significa que existe $C > 0$: tal que $\|\cdot\|_Y \leq C \|\cdot\|_X$). ★

Teorema F3.5 [Fischer-Riesz]. *L^p é um espaço de Banach para todo $p \in [1, \infty]$.* ◁

Proposição F3.6 [“Reciproca” da conv. dominada]. *Se $p \in [1, \infty]$ e $f_n \to f$ em $L^p(\Omega)$, então existe uma subsequência f_{n_k} que converge q.t.p e é dominada, ou seja, existe $h \in L^p(\Omega)$:*
– $f_{n_k} \to f$ q.t.p.
– $|f_{n_k}| \leq h$ q.t.p. ◁

APLICAÇÃO

Definição F3.7 (Operador de Nemitiskiĭ)**.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Dado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ e $p, q \in [1, \infty)$ O **Operador de Nemitiskiĭ** de L^p em L^q associado a f é o operador

$$N_f : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega) : u(x) \mapsto f(u(x))$$

★

Teorema F3.8. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua que satisfaz a condição de crescimento*

$$|f(s)|^q \leq c(|s|^p + 1), \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

e N_f o Operador de Nemitiskiĭ de L^p em L^q associado a f. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto limitado, então $N_f : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$ é um operador (não-linear) contínuo. ◁

Observação F3.9. Mais em geral podemos obter um resultado análogo considerando uma função $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaz

$$|f(x, s)|^q \leq c(|s|^p + 1), \quad \forall s \in \mathbb{R}, \; x \in \Omega$$

e definindo $N_f : u(x) \mapsto f(x, u(x))$ (veja por exemplo em [de 89, pag.11]). ★

Exercícios

Exercício. Mostre que em qualquer espaço topológico, $x_n \to x$ é equivalente a:
toda subsequência de $\{x_n\}$ possui uma subsequência que tende a x. ★

F4 Convexidade, reflexividade, representação de Riesz

Teorema F4.1.

- L^p *é* **unif. convexo** *e* **reflexivo** *para* $p \in (1, \infty)$.
- L^p **não é reflexivo** *para* $p = 1$ *e* $p = \infty$ *(exceto casos "triviais")*

$\triangleleft$

Teorema F4.2.

- $(L^p)^*$ *é isometricamente isomorfo a* $L^{p'}$, *para* $p \in (1, \infty)$.
- $(L^1)^*$ *é isometricamente isomorfo a* L^∞, *desde que a medida seja* $\sigma-$*finita.*
- $(L^\infty)^*$ *contém um subespaço isometricamente isomorfo a* L^1. *O subespaço é próprio (exceto casos "triviais").*

$\triangleleft$

Lema F4.3 [1a des. de Clarkson]. *Sejam* $a, b \in \mathbb{K}$ *e* $2 \leq p < \infty$. *então*

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p \leq \frac{|a|^p + |b|^p}{2}. \tag{F4.1}$$

Logo, se $f, g \in L^p(\Omega)$, *então*

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{L^p}^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_{L^p}^p \leq \frac{1}{2} \|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{2} \|g\|_{L^p}^p. \tag{F4.2}$$

$\triangleleft$

Corolário F4.4. L^p *é reflexivo para* $p \in [2, \infty)$. $\triangleleft$

Lema F4.5. $T : L^{p'} \to (L^p)^* : u \mapsto [\phi_u : f \mapsto \int_\Omega fu]$ *é uma isometria, para* $p \in (1, \infty)$.
O mesmo vale para $p = 1$ *se a medida é* $\sigma-$*finita e para* $p = \infty$ $\triangleleft$

Proposição F4.6. L^p *é reflexivo para* $p \in (1, 2]$. $\triangleleft$

> **Proposição F4.7.** *T é sobrejetora para $p \in (1, \infty)$.*
> *O mesmo vale para $p = 1$ se a medida é $\sigma-$finita mas não vale para $p = \infty$ (exceto casos "triviais").* $\lhd$

Em particular, mostramos o seguinte

Teorema F4.8 [de Representação de Riesz]. *Seja $1 \leq p < \infty$ e $\phi \in (L^p(\Omega))^*$ (no caso $p = 1$ assumimos misura $\sigma-$finita).*
Então existe um único $u \in L^{p'}(\Omega)$ tal que

$$\langle \phi, f \rangle = \int_\Omega uf\,, \quad \forall\ f \in L^p(\Omega).$$

Além disso $\|u\|_{L^{p'}(\Omega)} = \|\phi\|_{(L^p(\Omega))^*}$ $\lhd$

Isto permite identificar $L^{p'}(\Omega)$ e $(L^p(\Omega))^*$.

Observação F4.9. Existe uma 2a des. de Clarkson, que mostra que L^p é u.c. e logo reflexivo também no caso $p \in (1, 2]$. O resultado completo é o seguinte: [Clarkson] sejam $u, v \in L^p(\Omega)$, e $p' = \dfrac{p}{p-1}$.
Se $2 \leq p < \infty$, então

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_{L^p}^p + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|_{L^p}^p \leq \frac{1}{2}\ \|u\|_{L^p}^p + \frac{1}{2}\ \|v\|_{L^p}^p, \tag{F4.3}$$

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_{L^p}^{p'} + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|_{L^p}^{p'} \geq \left(\ \frac{1}{2}\ \|u\|_{L^p}^p + \frac{1}{2}\ \|v\|_{L^p}^p\ \right)^{p'-1}. \tag{F4.4}$$

Se $1 < p \leq 2$, então

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_{L^p}^{p'} + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|_{L^p}^{p'} \leq \left(\frac{1}{2}\|u\|_{L^p}^p + \frac{1}{2}\ \|v\|_{L^p}^p\right)^{p'-1}, \tag{F4.5}$$

$$2^{2-p}\left(\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_{L^p}^p + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|_{L^p}^p\right) \geq \ \frac{1}{2}\|u\|_{L^p}^p + \frac{1}{2}\ \|v\|_{L^p}^p. \tag{F4.6}$$

★

Exercícios

Exercício. Faça os exercícios 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7 (p. 118...) do [Bre11]. ★

F5 Densidade, separabilidade

Alguns resultados da teoria da medida:

- ([Fol99, Th.2.10]) Se $f : (X, \mathcal{M}) \to \mathbb{C}$ é mensurável, existe uma sequência $\{\phi_n\}$ de funções simples tais que $0 \le |\phi_1| \le |\phi_2| \le \cdots \le |f|$, $\phi_n \to f$ pontualmente e $\phi_n \to f$ uniformemente em qualquer subconjunto onde f é limitada.
- ([Fol99, Th.2.40]) Se $E \subseteq \mathbb{R}^N$ é Lebesgue mensurável, então sua medida de Lebesgue satisfaz

  $$\mu(E) = \inf\{\mu(A) : E \subseteq A \textit{ aberto}\} = \sup\{\mu(K) : E \supseteq K \textit{ compacto}\}$$

  Além disso, se $\mu(E) < \infty$, para cada $\epsilon > 0$ existe uma coleção finita de retângulos disjuntos $\{R_j\}_{j=1}^N$ cujos lados são intervalos tais que $\mu(E \Delta \cup_{j=1}^N R_j) < \epsilon$.

Proposição F5.1. *[Fol99, p.183..]*

- *Se $1 \le p \le \infty$, o conjunto das funções simples $f = \sum_{j=1}^N a_j \mathcal{X}_{E_j}$ é denso em $L^p(\Omega)$.*
- *Se $1 \le p < \infty$, os E_j podem ser tomados de medida finita*
- *Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ e a medida é a de Lebesgue, os E_j de medida finita podem ser substituídos por (multi-)retângulos de extremos racionais* $\lhd$

Corolário F5.2. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e a medida é a de Lebesgue, então $L^p(\Omega)$ é separável para $1 \le p < \infty$.*
Mais em geral, $L^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ é separável para $1 \le p < \infty$ se $\mathcal{M}$ é gerada por uma família enumerável de seus elementos (espaço de medida separável). $\lhd$

Proposição F5.3. *$L^\infty(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ não é separável (exceto casos "triviais")* $\lhd$

Proposição F5.4. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto e a medida é a de Lebesgue, então $C_c(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$.* $\lhd$

Exercícios

Exercício. Procure exemplos de

- $L^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ não separável com $p \in (1, \infty)$.
- sequência limitada em $L^1([0,1])$ (medida de Lebesgue) que não admite subsequências fracamente convergentes.
- $\phi \in (L^1)^*$ que não pode ser representada por $u \in L^\infty$.

★

Exercício. Mostre que $(\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \| \ \|_\infty)$ não é separável. ★

F6 Particularidades de L^1 e L^∞

- Quando L^1 e L^∞ são e.v.n. **finito dimensionais** (medida com apenas finitos conjuntos de medida positiva, a menos de conjuntos nulos), vale
  - eles são reflexivos e separáveis,
  - $(L^\infty)^*$ é isometricamente isomorfo a L^1 e $(L^1)^*$ é isometricamente isomorfo a L^∞
- em caso contrário
  - L^1 e L^∞ não são reflexivos e L^∞ *não é separável*.
  - $(L^1)^*$ é isometricamente isomorfo a L^∞ se a medida é σ-finita mas $(L^\infty)^*$ *não é isometricamente isomorfo a* L^1.
  - se a medida não é $\sigma-$finita pode existir $\phi \in (L^1)^*$ não representado por uma $u \in L^\infty$

Quando a medida é $\sigma-$finita (por ser o dual de L^1), L^∞ tem as propriedades:

- a bola fechada é compacta na $\sigma^* = \sigma(L^\infty, L^1)$,
- quando L^1 é separável, a bola fechada é metrizável e seq. limitadas tem subseq conv. fraco*
- $(L^\infty)^*$ contém um subespaço isometricamente isomorfo a L^1, que coincide com a imagem da isometria $T_1 : L^1 \to (L^\infty)^* : f \mapsto [\phi_f : u \mapsto \int_\Omega fu]$

  Isto permite identificar L^1 e $T_1(L^1) \subseteq (L^\infty)^*$.

  Porém (exceto casos triviais quando L^1 é reflexivo), T_1 não é sobrejetora

Exercícios

Exercício (EF1). Faça o exercício 4.13 (p. 121...) do [Bre11]. ★

F7 Convolução

Definição F7.1. • O **suporte** supp(f) de uma função $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ é o menor fechado F tal que $f \equiv 0|_{F^c}$.

O **suporte** de uma função (classe de eq.) $f \in L^p(\Omega)$ é a interseção dos fechados F tais que $f|_{F^c} = 0$ q.t.p.

Vale que $f = 0$ q.t.p. no complementar de supp(f)

- Dadas $f, g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{K}$ definimos a **convolução**

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy\,. \tag{F7.1}$$

- Se $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}^N$, definimos a translação $(\tau_h f)(x) := f(x+h)$. ★

Proposição F7.2. *Se as integrais (F7.1) correspondentes existem,*

- $f * g = g * f$
- $(f * g) * h = f * (g * h)$
- $\tau_h(f * g) = (\tau_h f) * g = f * (\tau_h g)$
- $\mathrm{supp}(f * g) \subset \overline{\mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(g)}$.

Em particular, se os supp. de f, g são compactos então o de $f * g$ também é compacto. ◁

Teorema F7.3. *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ com $1 \le p \le \infty$, então,*

- *$f(x-y)g(y)$ é integrável em y (para q.t.x)*
- *$f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e*

$$\boxed{\|f * g\|_p \le \|f\|_1 \, \|g\|_p.}$$ ◁

Exercícios

Exercício. Mostre que todo aberto $A \subseteq \mathbb{R}^N$ pode ser escrito como $A = \bigcup\{B_r(q) : \ r \in \mathbb{Q},\ q \in \mathbb{Q}^N,\ B_r(q) \subseteq A\}$.
Deduza que se $f = 0$qtp em A_i, para todo A_i de uma família (possivelmente não enumerável) de abertos, então $f = 0$qtp na reunião deles. ★

Exercício. Encontre conjuntos fechados A e B em $\mathbb{R}^N$ tais que $A + B$ não é fechado.
Mostre que se A é compacto e B é fechado então $A + B$ é fechado mas

pode não ser compacto.
Mostre que se A e B são compactos então $A + B$ é compacto. ★

Teorema F7.4. [Fol99, p.56] *Seja $\phi : X \times [a,b] \to \mathbb{C}$ integrável em X para todo $\tau \in [a,b]$. Seja $\Phi(\tau) = \int_X \phi(\xi,\tau)\, d\xi$.*

a) *Suponha que existe $h \in L^1(X)$ tal que $|\phi(\xi,\tau)| \le h(\xi)$ para todo ξ, τ. Se $\lim_{\tau\to\tau_0} \phi(\xi,\tau) = \phi(\xi,\tau_0)$ para todo ξ, então $\lim_{\tau\to\tau_0} \Phi(\tau) = \Phi(\tau_0)$; em particular, se $\phi(\xi,\cdot)$ é contínua para cada ξ, então Φ é contínua.*

b) *Suponha que $\frac{\partial\phi}{\partial\tau}$ exista e que existe $h \in L^1(X)$ tal que $|\frac{\partial\phi}{\partial\tau}(\xi,\tau)| \le h(\xi)$ para todo ξ, τ. Então Φ é derivável e $\Phi'(\tau) = \int_X \frac{\partial\phi}{\partial\tau}(\xi,\tau)\, d\xi$.* $\triangleleft$

Proposição F7.5. *Se $f \in C_c^k(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ então* [4]

$$f * g \in C^k(\mathbb{R}^N) \quad e \quad D^\alpha(f*g) = (D^\alpha f) * g, \ |\alpha| \le k. \qquad \triangleleft$$

Definição F7.6. Chamamos **sequência regularizante** (ou de molificadores) toda sequência $(\rho_n)_{n\ge1}$ de funções tais que

$$\boxed{\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N),} \quad \boxed{\text{supp}(\rho_n) \subset B_{\frac{1}{n}}(0),} \quad \boxed{\int \rho_n = 1,} \quad \boxed{\rho_n \ge 0 \text{ em } \mathbb{R}^N.}$$

Um exemplo pode ser construído assim: seja $\rho : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$:

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \ge 1. \end{cases}$$

Então $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\text{supp}(f) \subset B_1(0)$ e $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x)dx > 0$. Logo um oportuno reescalamento fornece uma sequência regularizante. ★

Proposição F7.7. *Seja ρ_n uma sequência regularizante.*

- *Se $f \in C(\mathbb{R}^N)$ então $\rho_n * f \to f$ uniformemente em compactos de $\mathbb{R}^N$.*
- *Se $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \le p < \infty$, então $\rho_n * f \to f$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$.* $\triangleleft$

> Uma função contínua em um compacto é uniformemente contínua.

[4] $C_c^k(\Omega) := C^k(\Omega) \cap C_c(\Omega)$
$L^p_{loc}(\Omega)$ é o espaço das funções que são $L^p(K)$ para qualquer compacto $K \subset \Omega$

Corolário F7.8. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto qualquer. Então* $C_c^\infty(\Omega)$ *é denso em* $L^p(\Omega)$ *para* $1 \leq p < \infty$. $\triangleleft$

Corolário F7.9. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto qualquer e* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *tal que* $\int uf = 0$ *para toda* $f \in C_c^\infty(\Omega)$. *Então* $u = 0$ *q.t.p. em* Ω. $\triangleleft$

Exercícios

Exercício. Faça os exercícios 4.15, 4.16 (pontos 1,2), 4.19 e 4.21 (p. 118...) do [Bre11] ★

F8 Compactos em $\mathcal{C}(K)$: Arzelá-Ascoli

> Um conjunto E num espaço métrico (X, d), é dito **totalmente limitado** se, para cada $\epsilon > 0$, E pode ser coberto por um número finito de bolas de raio ϵ.
>
> **Teorema F8.1.** [Fol99, p.15] *Um conjunto E num espaço métrico (X, d), é compacto se e só se é completo e tot. limitado.* ◁

Definição F8.2. Uma família $\mathcal{F}$ de funções é dita

- equicontínua em x se para todo $\varepsilon > 0$ existe uma vizinhança U de x tal que $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ para $y \in U$ e $f \in \mathcal{F}$,
- equicontínua se for equicontínua em todo ponto
- pontualmente limitada se $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ é limitado para todo x. ★

Teorema F8.3 [Arzelá-Ascoli]. [Fol99, p.137] *Se K é um espaço compacto e Hausdorff e $\mathcal{F}$ uma família equicontínua e pontualmente limitada em $(\mathcal{C}(K), \|\ \|_\infty)$, então $\mathcal{F}$ é totalmente limitada e seu fecho é compacto ($\mathcal{F}$ relativamente compacto).* ◁

F9 Compactos em L^p: Fréchet-Kolmogorov

Lema F9.1. *Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ com $1 \leq p < \infty$. Então*

$$\lim_{h \to 0} \|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 0.$$

$\triangleleft$

Teorema F9.2 [Fréchet-Kolmogorov]. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto, $\omega \subset\subset \Omega$* [5] *e $1 \leq p < \infty$. Se $\mathcal{F} \subseteq L^p(\Omega)$ satisfaz:*

- *$\mathcal{F}$ é limitado*
- $$\begin{gathered} \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \delta < \operatorname{dist}(\omega, \partial\Omega) \text{ tal que} \\ \|\tau_h f - f\|_{L^p(\omega)} < \epsilon,\ \forall h \in \mathbb{R}^N \text{ com } |h| < \delta \text{ e } \forall f \in \mathcal{F}. \end{gathered} \tag{F9.1}$$

Então $\mathcal{F}|_\omega$ é relativamente compacto em $L^p(\omega)$. $\triangleleft$

Observação F9.3. $\chi_{[n,n+1]}$ em $\mathbb{R}$ satisfaz as hipóteses, mas não possui subsequência convergente. O mesmo com $n\chi_{(0,1/n)}$ em $L^1((0,1))$.
Para concluir a compacidade em $L^p(\Omega)$ precisa uma condição a mais: ★

Corolário F9.4. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e $1 \leq p < \infty$.*
Se $\mathcal{F} \subseteq L^p(\Omega)$ é limitado, satisfaz (F9.1) para todo $\omega \subset\subset \Omega$ e além disso vale:

$$\text{dado } \varepsilon > 0, \text{ existe } \omega \subset\subset \Omega \text{ tal que } \sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_{L^p(\Omega \setminus \omega)} < \varepsilon. \tag{F9.2}$$

Então $\mathcal{F}$ é relativamente compacto em $L^p(\Omega)$. $\triangleleft$

Proposição F9.5. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e $1 \leq p < \infty$. Se $\mathcal{F}$ é relativamente compacto em $L^p(\Omega)$, então satisfaz as condições do Corolário F9.4.*
$\triangleleft$

Exercícios

Exercício. Prove a Proposição acima (ex. 4.34 do [Bre11]). ★

[5] $\omega \subset\subset \Omega$ significa que ω é aberto e $\overline{\omega}$ é um compacto contido em Ω.

Um exemplo de compacto pode ser obtido da seguinte forma:

Corolário F9.6. *Seja* $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ *uma função fixa e* $\mathcal{B}$ *um subconjunto limitado de* $L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < \infty$. *Se*

$$\mathcal{F} = g * \mathcal{B} := \{g * b : b \in \mathcal{B}\},$$

então $\mathcal{F}|_\omega$ *é relativamente compacto em* $L^p(\omega)$ *para todo* $\omega \subset \mathbb{R}^N$ *aberto e limitado.* $\triangleleft$

Referências

[Bre11] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Universitext. Springer, New York, 2011, pp. xiv+599. ISBN: 978-0-387-70913-0.

[de 89] D. G. de Figueiredo. *Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours.* Vol. 81. Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics. Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1989, pp. vi+96. ISBN: 3-540-51179-2.

[Fol99] G. B. Folland. *Real analysis.* Second. Pure and Applied Mathematics (New York). Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999, pp. xvi+386. ISBN: 0-471-31716-0.

Lista dos teoremas

Lista dos exercícios