G1 Espaços com produto interno

Seja H um esp vetorial. Um **produto escalar** (ou produto interno) em H é uma função $(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{K}$ tal que

- $(x, y) = \overline{(y, x)}$ para todo $x, y \in H$.
- $(ax + bx', y) = a\,(x, y) + b\,(x', y)$ para todo $x, x', y \in H$, $a, b \in \mathbb{K}$.
- $(x, x) \geq 0$, e $(x, x) = 0$ se e somente se $x = 0$.

Também vale:

- $(x, ay + by') = \bar{a}\,(x, y) + \bar{b}\,(x, y')$ para todo $x, y, y' \in H$, $a, b \in \mathbb{K}$.
- desigualdade de **Cauchy-Schwarz**
$$|\,(x, y)\,| \leq (x, x)^{\frac{1}{2}}\,(y, y)^{\frac{1}{2}}\,.$$
(a igualdade vale se e só se x e y são lin. dep.
- A função $\|\cdot\| : H \to \mathbb{R}$ definida por $\|u\| = (u, u)^{\frac{1}{2}}$ é uma **norma**.
- *identidade do paralelogramo*
$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad \forall x, y \in H.$$
- *Teorema de Pitágoras*: se $(x, y) = 0$ (escrevemos $x \perp y$: x, y são ortogonais) então
$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$
Mais geralmente, se $x_1, \cdots, x_n$ são vetores dois a dois ortogonais então
$$\|\sum_{i=1}^{n} x_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2.$$
- *Fórmula de polarização*
$$(x, y) = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4} \left[+i\,\frac{\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2}{4} \right]$$

Proposição G1.1. *Seja E um e.v.n. real [complexo] cuja norma verifica a lei do paralelogramo. Então a fórmula de polarização define um produto interno em E que induz a normal original.* ◁

G2 Espaços de Hilbert

Definição G2.1. Um **espaço de Hilbert** é um e.v.n com produto interno que é também completo. ★

- $\mathbb{K}^N$ com o produto
$$(x, y) = \sum_1^N x_i \overline{y_i}$$
é um espaço de Hilbert.

- ℓ_2 com o produto
$$(x, y) = \sum_1^\infty x_i \overline{y_i}$$
é um espaço de Hilbert.
– c_{00} pode ser munido do mesmo produto escalar, mas não é completo com a norma induzida

- $L^2(\Omega)$ com o produto interno
$$(f, g) = \int_\Omega f\bar{g}$$
é um espaço de Hilbert.
– $(\mathcal{C}([0,1]), \| \; \|_2)$ pode ser munido do mesmo produto escalar, mas não é completo.
– se $p \neq 2$, a norma de L^p não pode ser induzida por um produto escalar.
– a norma em $(\mathcal{C}([0,1]), \| \; \|_\infty)$ não pode ser induzida por um produto escalar.

Proposição G2.2. *Todo espaço de Hilbert é uniformemente convexo e portanto reflexivo.* ◁

Exercícios

Exercício. Faça o exercício 5.2 (p. 147) do [Bre11] ★

G3 Projeção sobre convexos

Lema G3.1. *Se $C \neq \emptyset$ é um subconjunto fechado e convexo de um espaço de Hilbert H e $x_0 \in H$, existe um único $y_0 \in C$ tal que*

$$\|x_0 - y_0\| = \inf_{y \in C} \|x_0 - y\| := d(x_0, C). \qquad \triangleleft$$

Definição G3.2. Escrevemos $y_0 = P_C x_0$ e dizemos que P_C é a projeção sobre o convexo C. ★

Proposição G3.3. *Nas condições do Lema G3.1, $P_C x_0$ é caracterizado por*

$$\boxed{P_C x_0 \in C \qquad e \qquad \Re e\,(x_0 - P_C x_0, w - P_C x_0) \leq 0, \quad \forall w \in C.} \qquad \triangleleft$$

Proposição G3.4. *Nas condições do Lema G3.1,*

$$\|P_C x_1 - P_C x_2\| \leq \|x_1 - x_2\|, \quad \forall x_1, x_2 \in H,$$

logo P_C é contínua. ◁

Exercícios

Exercício. Faça os exercícios 5.6 e 5.8 (p. 148) do [Bre11] ★

Observação G3.5. Manipulando as fórmulas, podemos ver também que

$$y_0 \text{ minimiza em } C \text{ a função } \frac{1}{2}\|y\|^2 - \Re e(y, x_0)$$

$$\Re e\,(w - y_0, y_0) \geq \Re e\,(w - y_0, x_0), \quad \forall w \in C. \qquad ★$$

Definição G3.6. Seja H um espaço de Hilbert, $A \subseteq H$. Definimos o **ortogonal de A**

$$A^{\perp} = \{x \in H : (x, a) = 0, \quad \forall a \in A\} :$$

$A^{\perp}$ é sempre um subespaço vetorial fechado. ★

Teorema G3.7. *Se H é um espaço de Hilbert e M é um subespaço vet. fechado, então P_M é um operador linear com $\|P_M\| = 1$ (exceto no caso $M = \{0\}$) e é caracterizado por*

$$\boxed{P_M x_0 \in M \qquad e \qquad (x_0 - P_M x_0, w) = 0, \quad \forall w \in M,}$$

ou seja, $\boxed{x_0 - P_M x_0 \in M^{\perp}.}$ ◁

Definição G3.8. P_M é dita projeção ortogonal sobre M. ★

Teorema G3.9. *Seja H um espaço de Hilbert e M um subespaço fechado, então vale:*

- *$H = M \oplus M^{\perp}$; isto é, cada $x \in H$ pode ser expresso unicamente como $x = m + m'$ onde $m \in M$ e $m' \in M^{\perp}$;*
- *na decomposição acima, $m = P_M x$ e $m' = P_{M^{\perp}} x = (I - P_M)x$;*
- *$P_M = P_M^2$ e $P_M \circ P_{M^{\perp}} = P_{M^{\perp}} \circ P_M = 0$.* ◁

Exercícios

Exercício. Prove diretamente (usando o Teorema acima) a seguinte consequencia do Teorema de Hahn-Banach: Seja H um espaço de Hilbert, M um subespaço fechado e $\phi \in M^*$. Então existe $\widetilde{\phi} \in H^*$ tal que $\widetilde{\phi}|_M = \phi$ e $\left\|\widetilde{\phi}\right\| = \|\phi\|$

★

Teorema G3.10 [Teorema de Representação de Riesz-Frechet]. *Se $f \in H^*$, existe um único $y \in H$ tal que $f(x) = (x, y)$ para todo $x \in H$. Além disso, $\|y\|_H = \|f\|_{H^*}$* $\triangleleft$

Isto permite identificar H e H^*
Logo podemos também identificar H e H^{**} (reflexividade).

Exercícios

Exercício. Faça os exercícios 5.16, 5.17, 5.19 (p. 150..) do [Bre11] (leia primeiro o remark 3 na p.136). ★

Definição G3.11. Uma forma sesqui-linear[1] $a(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{K}$ é dita

- **contínua** se existe C tal que $|a(x,y)| \leq C\|x\|\|y\|, \quad \forall x, y \in H,$
- **coerciva** se existe $\alpha > 0$ tal que $\Re e\, a(x,x) \geq \alpha \|x\|^2, \quad \forall x \in H,$
- **sesquisimétrica** (ou hermitiana) se $a(x,y) = \overline{a(y,x)} \quad \forall x, y \in H.$ ★

Lema G3.12. *Seja H um espaço de Hilbert e $a : H \times H \to \mathbb{K}$ uma forma sesqui-linear contínua e coerciva.*
Então existe $A \in L(H,H)$ tal que $a(w,z) = (w, Az)$.
A é um isomorfismo e $\alpha \|z\| \leq \|Az\| \leq C \|z\|$. ◁

Teorema G3.13 [Stampacchia]. *Nas condições do Lema G3.12, seja $C \neq \emptyset$ um convexo fechado. Dado $\varphi \in H^*$, existe um único $y_0 \in C$ tal que*

$$\Re e\, a(w - y_0, y_0) \geq \Re e\, \varphi(w - y_0), \quad \forall w \in C. \tag{G3.1}$$

Além disso, se a é sesqui-simétrica, y_0 é caracterizado por

$$\begin{cases} y_0 \in C \\ \dfrac{1}{2} a(y_0, y_0) - \Re e\, \varphi(y_0) = \min\limits_{y \in C} \left\{ \dfrac{1}{2} a(y,y) - \Re e\, \varphi(y) \right\}. \end{cases} \tag{G3.2}$$

◁

Corolário G3.14 [O Teorema de Lax-Milgram]. *Nas condições do Lema G3.12, para cada $\varphi \in H^*$, existe um único $y_0 \in H$ tal que*

$$a(w, y_0) = \varphi(w), \quad \forall w \in H.$$

Além disso, se a é sesqui-simétrica, então y_0 é caracterizada por:

$$\begin{cases} y_0 \in H \\ \dfrac{1}{2}\, a(y_0 . y_0) - \Re e\, \varphi(y_0) = \min\limits_{y \in H} \left\{ \dfrac{1}{2}\, a(y,y) - \Re e\, \varphi(y) \right\}. \end{cases}$$

◁

Exercícios

Exercício. Faça o exercício 5.20 (p. 151) do [Bre11] ★

[1] linear ma primeira entrada e linear no conjugado da segunda entrada

G4 Bases ortonormais

Definição G4.1. Um conjunto em H é dito **conjunto ortonormal** se os seus elementos são ortogonais a dois a dois e todos unitários. ★

Dada uma sequência $\{x_n\}$ l.i. podemos construir (processo de Gram-Schmidt) uma seq. ortonormal $\{e_n\}$ tal que $span(x_1, .., x_k) = span(e_1, .., e_k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Teorema G4.2 [Desigualdade de Bessel]. *Se $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ é um conjunto ortonormal em H, então para $x \in H$,*

$$\sum_{\alpha\in A} |\,(x, e_\alpha)\,|^2 \leq \|x\|^2.$$

Em particular $\{\alpha \in A : (x, e_\alpha) \neq 0\}$ é enumerável. ◁

Teorema G4.3. *Se $S = \{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ é um conjunto ortonormal em H, as seguintes afirmativas são equivalentes:*

a) (Completeza) *Se $(x, e_\alpha) = 0$ para todo $\alpha \in A$, então $x = 0$.*

b) (Identidade de Parseval) $\|x\|^2 = \sum_{\alpha\in A} |\,(x, e_\alpha)\,|^2$ *para todo $x \in H$.*

c) Para cada $x \in H$, $x = \sum_{\alpha\in A} (x, e_\alpha)\, e_\alpha$, onde a soma converge independentemente da ordem dos termos. ◁

Definição G4.4. Um conjunto em H é dito **base de Hilbert** (ou base ortonormal) se é um conjunto ortonormal que satisfaz as propriedades equivalentes do Teorema G4.3 ★

Exercícios

Exercício. Mostre que

- um conjunto ortonormal é sempre linearmente independente,
- em dimensão finita, uma base de Hilbert é também uma base de Hamel
- uma base de Hilbert enumerável é também uma base de Schauder
- as propriedades (a-b-c) do Teorema G4.3 também equivalem a
  – $S^\perp = \{0\}$
  – não existe uma conjunto ortonormal que contenha propriamente S
  – $H = \overline{span(S)}$. ★

Proposição G4.5. *Todo espaço de Hilbert tem uma base ortonormal.* ◁

Teorema G4.6. *Um espaço de Hilbert H é separável se e somente se tem uma base ortonormal enumerável.*
Neste caso toda base ortonormal de H é enumerável e (se $\dim H = \infty$) H é isometricamente isomorfo a ℓ_2 ◁

G4.1 Outra formulação

Definição G4.7. Seja (E_n) uma sequência de subespaços fechados de H tal que
(a) são a dois a dois ortogonais;
(b) O espaço vetorial gerado por $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ é denso em H .

Então dizemos que H é **soma de Hilbert dos espaços E_n** e escrevemos $H = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} E_n$. ★

Exemplo: se e_n é base de Hilbert, então H é soma de Hilbert dos espaços $\mathbb{K}e_n$.

Teorema G4.8. *Se* $H = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} E_n$ *então*

a) (Completeza) *Se* $P_{E_n}x = 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *então* $x = 0$.

b) (Identidade de Parseval) $\|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|P_{E_n}x\|^2$ *para todo* $x \in H$.

c) Para cada $x \in H$, $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} P_{E_n}x$, *onde a soma converge independentemente da ordem dos termos.* ◁

Exercícios

Exercício. Faça os exercícios 5.26, 5.27 e 5.28 (p. 154) do [Bre11] ★

Exercício. Veja os sistemas descritos nos exercícios 5.31, 5.32 (base de Haar e sistema de Rademacher) (p. 155) do [Bre11] ★

Exemplo G4.9.
- A base canônica e_n em ℓ_2 é uma base de Hilbert.
- As funções $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx)$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx)$ formam uma base de Hilbert em $L^2([0, 2\pi], \mathbb{R})$.
- As funções $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}$ $(n \in \mathbb{Z})$ formam uma base de Hilbert em $L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$. ★

Referências

[Bre11] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Universitext. Springer, New York, 2011, pp. xiv+599. ISBN: 978-0-387-70913-0.

Lista dos teoremas

Lista dos exercícios