B1 Funcionais lineares

- Os elementos de $\mathcal{L}_?(E, \mathbb{K})$ são ditos **funcionais lineares**
- Os elementos de $L(E, \mathbb{K})$ são ditos **funcionais lineares contínuos** (limitados). $E^* := L(E, \mathbb{K})$ é dito dual de E e é sempre Banach.

B2 O Teorema de Hahn Banach

Um **funcional sublinear** num e.v.n E, é uma função $p : E \to \mathbb{R}$ tal que

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \text{e} \quad p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \forall\, x, y \in E,\ \forall \lambda \geq 0.$$

Exemplos: um funcional linear, uma norma, uma seminorma[1], atendem à definição.

Teorema B2.1 [Hahn-Banach real]. *Sejam*

- *E um espaço vetorial real,*
- *p um funcional sublinear em E,*
- *M um subespaço*
- *f um funcional linear em M tal que $f(x) \leq p(x)$ para todo $x \in M$.*

Então existe um funcional linear $\widetilde{f}$ em E tal que $\widetilde{f}(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E$ e $\widetilde{f}|_M = f$. [Fol99, prova:p.158] ◁

Teorema B2.2 [Hahn-Banach complexo]. *Sejam*

- *E um espaço vetorial ~~real~~ complexo,*
- *p ~~um funcional sublinear~~ uma seminorma em E,*
- *M um subespaço*
- *f um funcional linear em M tal que $\cancel{f(x) \leq p(x)}$ $|f(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in M$.*

Então existe um funcional linear $\widetilde{f}$ em E tal que $\cancel{\widetilde{f}(x) \leq p(x)}$ $|\widetilde{f}(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in E$ e $\widetilde{f}|_M = f$. ◁

[1](uma **seminorma** deve satisfazer as propriedades de norma exceto a condição $\|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$)

Relação espaço real / espaço complexo

- Seja E um e.v. sobre $\mathbb{C}$, definimos $E_{\mathbb{R}}$ o e.v. sobre $\mathbb{R}$ obtido limitando a multiplicação aos escalares reais. Se E for normado também induz uma norma em $E_{\mathbb{R}}$.
- Dado $f \in \mathcal{L}_?(E, \mathbb{C})$, vale $\phi := \Re e(f) \in \mathcal{L}_?(E_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$ e $f(x) = \phi(x) - i\phi(ix)$
- Dado $\phi \in \mathcal{L}_?(E_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$, vale $f(x) := \phi(x) - i\phi(ix) \in \mathcal{L}_?(E, \mathbb{C})$
- Além disso $\|f\|_{E^*} = \|\phi\|_{E^*_{\mathbb{R}}}$

B2.1 Algumas consequências do T. de Hahn-Banach

Corolário B2.3 [Extensão de funcional mantendo a norma]. *Seja E um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$, M um subespaço e $f \in M^*$. Então existe um funcional $\widetilde{f} \in E^*$ tal que $\widetilde{f}|_M = f$ e $\left\|\widetilde{f}\right\|_{E^*} = \|f\|_{M^*}$* $\triangleleft$

Teorema B2.4 [Existem muitos funcionais]. *Seja E um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$.*

a. *Se M é um subespaço fechado e $x_0 \in E \setminus M$, existe $f \in E^*$ tal que $f|_M = 0$, $\|f\| = 1$ e $f(x_0) = d(x_0, M) = \inf_{m \in M} \|x_0 - m\|$.*

b. *Se $x_0 \neq 0$, existe $f \in E^*$ tal que $\|f\| = 1$ e $f(x_0) = \|x_0\|$.*

c. *Os funcionais lineares limitados em E separam pontos.*

$\triangleleft$

Exercícios

Exercício. Se E é não trivial, vale $\|x\|_E = \max_{\substack{f \in E^* \\ \|f\|=1}} |f(x)|$ (mostre que a norma é igual ao sup e que o sup é atingido)
Mostre que ao contrário, na formula já vista $\|f\|_{E^*} = sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} |f(x)|$, o sup pode não ser atingido (pense no espaço das funções contínuas em $[0, 1]$ com $f(0) = 0$. Veja também o ex 1.4 (p. 21) do [Bre11]) ★

Exercício. Mostre que um subespaço M de em e.v.n. E é denso se e só se vale que

$$\forall \phi \in E^* \ t.q.\ \phi|_M = 0,\ vale\ \phi \equiv 0$$

★

Exercício (EB1). Sejam $e_i = (\delta_{i,j})_{j \in \mathbb{N}}$, $i \in \mathbb{N}$, $h = (1/j)_{j \in \mathbb{N}}$ e $\mathbf{1} = (1, 1, 1, 1, ...)$.
Mostre que existe $\phi \in (\ell_\infty)^*$ tal que $\phi(e_i) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$ mas $\phi(\mathbf{1}) \neq 0$,
Mostre que não existe $\phi \in (\ell_\infty)^*$ tal que $\phi(e_i) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e $\phi(h) \neq 0$. ★

B2.2 Outras consequências

Proposição B2.5. *Se E é um e.v.n. e E^* é separável então E também é separável.* $\triangleleft$

Observação. A reciproca não é verdadeira ★

Proposição B2.6. *Todo e.v.n. separável é isometricamente isomorfo a um subespaço de ℓ_∞.* $\triangleleft$

Exercícios

Exercício (EB2)**.** Seja E é um e.v.n. de dimensão infinita e separável.

- Mostre que existe uma sequência de subespaços de dimensão finita cuja reunião é densa.
- Mostre que existe uma sequência ϕ_n em E^* com $\|\phi_n\| = 1$ e tal que $\phi_n(x) \to 0$ para todo $x \in E$

★

B3 Dual, bidual e reflexividade

Outra consequência do Teorema de Hahn-Banach é

Teorema B3.1 [Mergulho canônico]. *Seja E um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$. Dado $x \in E$ defina $\hat{x} : E^* \to \mathbb{K}$ por*

$$\hat{x}(f) = f(x), \quad \forall f \in E^*.$$

Então a aplicação

$$J : E \to E^{**} : x \mapsto \hat{x}$$

é um mergulho isométrico de E em E^{**}. ◁

Definição. J é dito **mergulho canônico** de E em E^{**};
Um e.v.n E é dito **reflexivo** se $J(E) = E^{**}$. ★

Algumas consequências

Proposição B3.2. *se E é reflexivo então*

- *E é Banach*
- $\|f\|_{E^*} = max_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} |f(x)|$ ◁

Exemplos:

Proposição B3.3. *Se $p \in [1, \infty)$ e $p' = \frac{p}{p-1} \in (1, \infty]$, então $(\ell_p)^*$ é isometricamente isomorfo a $\ell_{p'}$.* [Muj, p.42] ◁

Exercícios

Exercício. Mostre que ℓ_1 é isometricamente isomorfo a $(c_0)^*$ e $(c)^*$ (dois diferentes isomorfismos) mas apenas a um subespaço próprio de $(\ell_\infty)^*$. ★

Corolário B3.4. *ℓ_p com $p \in (1, \infty)$ é reflexivo.*
Não são reflexivos ℓ_1, ℓ_∞, c_0 e c ◁

Observação B3.5. No caso particular de sequencias finitas ($\mathbb{K}^n$), temos então que o dual de $(\mathbb{K}^n, \| \|_p)$ é ismoetr. isom. a $(\mathbb{K}^n, \| \|_{p'})$. Isso inclusive para $p = \infty$ (podemos ver $\mathbb{K}^n$ como subconjunto de c_0). Todos são então reflexivos. ★

B4 Versões geométricas de H-B (aqui $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

Um **hiperplano** (afim) é um conjunto da forma

$$H = [f = \alpha] := \{x \in E : f(x) = \alpha\}.$$

onde $f \in \mathcal{L}_?(E, \mathbb{R})$, $f \neq 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Proposição B4.1.

- $[f = \alpha]$ *é fechado se e somente se* f *é contínua.*
- $[f = 0]$ *é o único subespaço próprio de* E *que contém* $[f = 0]$.
- $[f = \alpha]$ *é fechado ou é denso em* E ◁

Definição B4.2. Se $A, B \subseteq E$ dizemos que $[f = \alpha]$ separa A e B

- no sentido fraco, se

$$f(x) \leq \alpha \quad \forall\, x \in A \quad \text{e} \quad f(x) \geq \alpha \quad \forall \quad x \in B\,.$$

- no sentido forte, se existe $\epsilon > 0$ tal que

$$f(x) \leq \alpha - \epsilon \quad \forall\, x \in A \qquad \text{e} \qquad f(x) \geq \alpha + \epsilon \quad \forall \quad x \in B\,. \qquad \bigstar$$

Teorema B4.3 [Hahn-Banach (Formas Geométricas]). *Seja* E *um espaço vetorial normado real e sejam* $A, B \subseteq E$ *dois conjuntos convexos, não vazios e disjuntos.*

FG1 Se A *é aberto então existe um hiperplano fechado que separa* A *e* B *no sentido fraco.*

FG2 Se A *é fechado e* B *é compacto, então existe um hiperplano fechado que separa* A *e* B *no sentido forte.*

◁

Dado um aberto convexo C com $0 \in C$, definimos o **Funcional de Minkowski de C**:

$$p(x) = \inf\{\beta^{-1} > 0\ ;\ \beta\, x \in C\}$$

Lema B4.4. *p é um funcional sub-linear, $C = \{x \in E : p(x) < 1\}$ e existe $M > 0$ tal que*

$$0 \leq p(x) \leq M\|x\|, \quad \forall \quad x \in E\,.$$

$\lhd$

Lema B4.5. *Seja $C \subset E$ uma aberto convexo não vazio e $x_0 \in E \setminus C$. Então existe $f \in E^*$ tal que $f(x) < f(x_0)$ para todo $x \in C$. Em particular o hiperplano fechado de equação $[f = f(x_0)]$ separa C de x_0 no sentido fraco.* $\lhd$

Exercícios

Exercício. Mostre que se C também é equilibrado (i.e. $\lambda x \in C\ \forall x \in C,\ \lambda \in \mathbb{K},\ |\lambda| = 1$) então p é uma seminorma.
Se além disso C é limitado então p é uma norma. ★

Exercício. Faça o exercício 1.14 (p. 23-24) do [Bre11] ★

B5 Consequências do Teorema de Baire

Definição B5.1. Uma **aplicação aberta** é uma aplicação $T : E \to F$ tal que se $A \subseteq E$ é aberto então $T(A) \subseteq F$ é aberto.

Uma **aplicação fechada** é uma aplicação $T : E \to F$ tal que o seu gráfico $G_T = \{(x, y) \in E \times F : \ y = Tx\}$ é um conjunto fechado em $E \times F$.

A condição pode ser escrita como

$$\text{se } (x_n, T(x_n)) \to (x, y) \in E \times F \text{ então } y = T(x) \tag{B5.1}$$

★

Exercícios

Exercício. Mostre que se T é linear então (B5.1) é equivalente a se $(x_n, T(x_n)) \to (0, y) \in E \times F$ então $y = 0$ ★

Exercício. Mostre que $T \in \mathcal{L}_?(E, F)$ é aberta se e só se existe $r > 0$ tal que $B^F_r(0) \subseteq T(B^E_1(0))$ ★

Teorema B5.2 [Da aplicação aberta]. *Sejam E e F espaços de Banach. Se $T \in L(E, F)$ é sobrejetora, então T é aberta.* ◁

Corolário B5.3. *Se E e F são espaços de Banach e $T \in L(E, F)$ é bijetora, então T é um isomorfismo; isto é, $T^{-1} \in L(F, E)$.*

◁

Exercícios

Exercício. Se $T : (E, \| \ \|_1) \to (E, \| \ \|_2) : x \mapsto x$, ambos são Banach (com sua norma) e existe C: $\|x\|_2 \leq C \|x\|_1$ em E, então as normas são equivalentes. ★

Exercício. Sejam E e F espaços de Banach e $T \in L(E, F)$ sobrejetora. Mostre que existe $C > 0$ tal que para cada $y \in F$ pode-se encontrar $x \in E$ tal que

$$\|x\| \leq C\|y\| \quad \text{e} \quad y = Tx.$$ ★

Teorema B5.4 [Do gráfico fechado]. *Se E e F são espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}_?(E,F)$ é fechada então T é contínua.* $\lhd$

Exercícios

Exercício (EB3). Denote por E o espaço $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ munido da norma $\|x\|_1 = \int_a^b |x(t)|dt$, e por F o mesmo espaço com a norma uniforme. Mostre que a aplicação identidade $x \in E \mapsto x \in F$ tem gráfico fechado, mas não é contínua. ★

Exercício (EB4). Sejam E e F espaços de Banach. Seja $T : E \to F$ uma aplicação tal que $\varphi \circ T \in E^*$ para todo $\varphi \in F^*$. Prove que $T \in L(E,F)$. ★

Teorema B5.5 [Da Limitação Uniforme - Banach-Steinhaus]. *Sejam E espaço de Banach*[a]*, F e.v.n e $A \subseteq L(E,F)$. Se $\sup_{T\in A} \|Tx\| < \infty$ para todo $x \in E$, então $\sup_{T\in A} \|T\| < \infty$.* $\lhd$

[a] É suficiente assumir que E, F sejam e.v.n e que $\sup\limits_{T\in A} \|Tx\| < \infty$ valha para x em subconjunto de segunda categoria

Corolário B5.6. *Sejam E, F como no Teorema e $\{T_n\} \subset L(E,F)$ tal que $\{T_n x\}$ converge para cada $x \in E$. Se $T : E \to F$ é definida por $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$, então $T \in L(E,F)$ e $\|T\| \leq \liminf \|T_n\|$.* $\lhd$

Corolário B5.7. *Seja E um espaço de Banach e $\mathcal{B} \subset E^*$, suponha que $\{\phi(x),\ \phi \in \mathcal{B}\}$ seja limitado $\forall\ x \in E$. Então $\mathcal{B}$ é limitado.* $\lhd$

Corolário B5.8. *Se E é um e.v.n. e $B \subset E$, suponha que $\phi(B) = \{\phi(x),\ x \in B\}$ seja limitado $\forall\ \phi \in E^*$. Então B é limitado.* $\lhd$

Exercícios

Exercício. Faça o exercício 2.4 (p. 49) do [Bre11] ★

B6 Mais alguns resultados

B6.1 Espaço quociente

Seja E um e.v. e M um subespaço. [Muj, p.26]

- $x \sim y: \; x - y \in M$ é uma relação de equivalência em E;
- o **espaço quociente** E/M das classes de equivalência é um e.v. definindo

$$[x] + [y] = [x + y], \qquad \lambda[x] = [\lambda x]$$

- $\pi : E \to E/M : x \mapsto [x]$ é dita **mapa quociente**, é linear e sobrejetora

Se E é normado definimos $\|[x]\|_q := inf_{x\in[x]} \|x\|_E$

Proposição B6.1. *se E é e.v.n. e M é subespaço fechado então*

- $[x] = x + M$ *e* $\|[x]\|_q = d(x, M)$
- $\| \; \|_q$ *é uma norma em* E/M
- π *é contínua e aberta. (em particular* $\pi(B_E) = B_{E/M}$*).*
- *Se E é completo, então E/M é completo também.*

$\triangleleft$

B7 Soma de subespaços

Proposição B7.1. *Seja E um espaço de Banach e M e N subespaços fechados de E tais que $M + N$ é fechado. Então existe $C > 0$ tal que:*
para todo $z \in M + N$, existem $x \in M$, $y \in N$ tais que $z = x + y$ e $\|x\|, \|y\| \leq C\|z\|$

Se $M \cap N = \{0\}$ então x, y são únicos e $z \mapsto (x, y)$ é linear e contínua. $\triangleleft$

Definição B7.2. Seja E um espaço de Banach e M um subespaço fechado. Um subespaço N é dito **complemento topológico de M** se N é fechado, $M \cap N = \{0\}$ e $M + N = E$. ★

- Subespaços de dimensão finita (ou fechados e de codimensão finita) sempre possuem complemento topológico.[Bre11, prova:p.38]

B8 Outros exercícios

Exercícios

Exercício (EB5). Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \to F$ uma aplicação linear. Prove a equivalência dos três resultados B5.4, B5.2 e B5.3. (Sugestão: passe pelo quociente E/N onde $N = \{x \in E : \ Tx = 0\}$.) ★

Notação. Uma notação frequentemente usada para funcionais é $\langle \phi, x \rangle := \phi(x)$ onde $\phi \in E^*$ e $x \in E$.
Para maior clareza às vezes usa $\langle \phi, x \rangle_{E^*,E}$ ★

Exercícios

Exercício. Seja E um espaço de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $T : E \to E^*$ um operador linear tal que $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ para todo $x \in E$. Mostre que T é contínuo.

Dica: mostre que o gráfico é fechado. Suponha $x_n \to 0$ e $Tx_n \to \phi$. Mostre que $\phi(y) = 0$ para todo $y \in E$ avaliando $\langle T(x_n - \lambda y), (x_n - \lambda y) \rangle$ com $\lambda > 0$

Mostre agora o caso em que $\langle Tx, y \rangle = \langle Ty, x \rangle$ para todo $x, y \in E$ ★

Referências

[Bre11] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Universitext. Springer, New York, 2011, pp. xiv+599. ISBN: 978-0-387-70913-0.

[Fol99] G. B. Folland. *Real analysis.* Second. Pure and Applied Mathematics (New York). Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999, pp. xvi+386. ISBN: 0-471-31716-0.

[Muj] J. Mujica. "Notas de análise funcional". Em: *Notas de aula - IMECC - UNICAMP* ().

Lista dos teoremas

Lista dos exercícios