5. *Leis de DeMorgan.* As leis de DeMorgan dizem que $\neg(p \vee q)$ é equivalente a $\neg p \wedge \neg q$ e que $\neg(p \wedge q)$ é equivalente a $\neg p \vee \neg q$.
6. *Implicação.* As quatro frases em linguagem natural a seguir são equivalentes:
   - s implica t;
   - se s, então t;
   - t se s;
   - s somente se t.
7. *Tabelas verdade para "implica" e "se e somente se".*

IMPLICA

s	t	$s \Rightarrow t$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

SE E SOMENTE SE

s	t	$s \Leftrightarrow t$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

8. *Princípio do meio excluído.* Uma declaração é verdadeira exatamente quando ela não é falsa.

PROBLEMAS

Todos os problemas com asterisco têm uma resposta ou uma dica disponível ao final do livro.

1. Crie tabelas verdade para as expressões a seguir.
   *a) $(s \vee t) \wedge (\neg s \vee t) \wedge (s \vee \neg t)$
   *b) $(s \Rightarrow t) \wedge (t \Rightarrow u)$
   *c) $(s \vee t \vee u) \wedge (s \vee \neg t \vee u)$
2. Encontre pelo menos mais dois exemplos do uso de alguma palavra ou frase equivalente a "implica" nos lemas, teoremas ou corolários dos capítulos 1 ou 2.
3. Encontre pelo menos mais dois exemplos do uso da frase "se e somente se" nos lemas, teoremas e corolários dos capítulos 1 ou 2.

*4. Mostre que as declarações $s \Rightarrow t$ e $\neg s \vee t$ são equivalentes.

*5. Prove a lei de DeMorgan que afirma que $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$.

6. Mostre que $p \oplus q$ é equivalente a $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$.

*7. Mostre uma forma simplificada de cada uma das seguintes expressões (usando V para indicar uma declaração que é sempre verdadeira e F para indicar uma declaração que é sempre falsa).[4]
   a) $s \vee s$
   b) $s \wedge s$
   c) $s \vee \neg s$
   d) $s \wedge \neg s$

8. Usando V para indicar uma declaração que é sempre verdadeira e F para indicar uma declaração que é sempre falsa, dê uma forma simplificada de cada uma das seguintes declarações.
   a) $V \wedge s$
   b) $F \wedge s$
   c) $V \vee s$
   d) $F \vee s$

*9. Use a lei de DeMorgan, a lei distributiva e os problemas 7 e/ou 8 para mostrar que

$$\neg(s \vee t) \vee \neg(s \vee \neg t)$$

é equivalente a $\neg s$.

10. Dê um exemplo em linguagem natural em que "ou" pareceria significar "ou exclusivo" (ou em que você acha que pareceria para muitas pessoas) e um exemplo em que "ou" pareceria significar "ou inclusivo" (ou em que você acha que pareceria para muitas pessoas).

11. Dê um exemplo em linguagem natural em que "se... então" pareceria significar "se e somente se" (ou em que você acha que pareceria para muitas pessoas) e um exemplo em que ele pareceria não significar "se e somente se" (ou em que você acha que não pareceria para muitas pessoas).

12. Encontre uma declaração que envolva apenas $\wedge$, $\vee$ e $\neg$ (além de s e t) equivalente a $s \Leftrightarrow t$. Sua declaração tem o mínimo de símbolos possível? Se achar que não, tente achar uma com menos símbolos.

13. Suponha que, para cada linha de uma tabela verdade de duas variáveis, você seja informado se a coluna final nessa linha deverá ser avaliada como verdadeira ou falsa. (Por exemplo, é possível ser informado que a coluna final deverá conter V, F, F e V, nessa ordem. Observe que é possível interpretar que o Problema 12 pede esse padrão.) Explique como criar uma declaração lógica usando os símbolos s, t, $\wedge$, $\vee$ e $\neg$ que tenha esse padrão como sua coluna final. É possível estender esse procedimento para um número de variáveis qualquer?

*14. No Problema 13, sua solução pode ter usado $\wedge$, $\vee$ e $\neg$. É possível dar uma solução usando apenas um desses símbolos? É possível dar uma solução usando apenas dois desses símbolos?

15. Provamos que $\wedge$ distribui sobre $\vee$ no sentido de dar duas declarações equivalentes que representam os dois "lados" da lei distributiva. Responda a cada pergunta a seguir e explique por que sua resposta está correta.
   a) $\vee$ distribui sobre $\wedge$?
   b) $\vee$ distribui sobre $\oplus$?
   c) $\wedge$ distribui sobre $\oplus$?

4 Uma declaração que é sempre verdadeira é denominada *tautologia*; uma declaração que é sempre falsa é denominada *contradição*.

3.2 Variáveis e quantificadores

Variáveis e universos

As instruções que usamos nas linguagens de computador para controlar laços (*loops*) ou condicionais são instruções sobre variáveis. Quando declaramos essas variáveis, damos ao computador informações sobre seus possíveis valores. Por exemplo, em algumas linguagens de programação, podemos declarar que uma variável será um valor Booleano ou um número inteiro ou real.[5] Em português e na matemática, também criamos instruções sobre variáveis, mas nem sempre fica claro quais palavras são usadas como variáveis e quais valores elas podem assumir. Usamos a frase **varia por** para descrever o conjunto de valores que uma variável pode assumir. Por exemplo, em português, poderíamos dizer: "se o guarda-chuva de alguém está aberto, então deve estar chovendo". Neste caso, a palavra "alguém" é uma variável, e supostamente ela *varia por* pessoas que estejam em um determinado lugar e em um determinado momento. Na matemática, podemos dizer: "para cada par de inteiros positivos m e n, existem inteiros não negativos q e r, com $0 \le r < n$, tais que $m = nq + r$". Neste caso, m, n, q e r certamente são variáveis; nossa própria declaração sugere que duas variáveis variam pelos inteiros positivos e duas variam pelos inteiros não negativos. Chamamos o conjunto de valores possíveis para uma variável de **universo**.

Na declaração "m é um inteiro par", fica claro que m é uma variável, mas o universo não é dado. O universo poderia ser inteiros, somente os inteiros pares, os números

5 Note que declarar uma variável x como um inteiro em um programa, digamos, em C, não é o mesmo que dizer que x é um inteiro. Em um programa em C, um inteiro na realidade pode ser um inteiro de 32 bits, de modo que está limitado a valores entre $2^{31} - 1$ e -2^{31}. De modo semelhante, um número real tem alguma precisão fixa; logo, uma variável real y pode não poder assumir um valor de, digamos, 10^{-985}.

4. *Quantificador.* Uma frase que converte uma declaração simbólica sobre potencialmente qualquer membro do nosso universo em uma declaração sobre o universo em seu lugar é chamada de *quantificador*. Existem dois tipos de quantificadores:
   - *Quantificadores universais* afirmam que uma declaração sobre uma variável é verdadeira para cada valor da variável em seu universo.
   - *Quantificadores existenciais* afirmam que uma declaração sobre uma variável é verdadeira para pelo menos um valor da variável em seu universo.
5. *Universos maiores.* Considere que U_1 seja um universo e U_2 seja outro universo, com $U_1 \subseteq U_2$. Suponha que $q(x)$ seja uma declaração de que $U_1 = \{x \mid q(x) \text{ é verdadeiro}\}$. Se $p(x)$ é uma declaração sobre U_2, ela também pode ser interpretada como uma declaração sobre U_1, e:
   a. $\forall x \in U_1(p(x))$ é equivalente a $\forall x \in U_2(q(x) \Rightarrow p(x))$
   b. $\exists x \in U_1(p(x))$ é equivalente a $\exists x \in U_2(q(x) \wedge p(x))$.
6. *Provando declarações quantificadas como verdadeiras ou falsas.*
   - A declaração $\exists x \in U(p(x))$ é verdadeira se houver pelo menos um valor de x em U para o qual a declaração $p(x)$ seja verdadeira.
   - A declaração $\exists x \in U(p(x))$ é falsa se não houver $x \in U$ para o qual $p(x)$ seja verdadeira.
   - A declaração $\forall x \in U(p(x))$ é verdadeira se $p(x)$ for verdadeira para cada valor de x em U.
   - A declaração $\forall x \in U(p(x))$ é falsa se $p(x)$ for falsa para pelo menos um valor de x em U.
7. *Negação de declarações quantificadas.* Para negar uma declaração quantificada, troca-se o quantificador e empurra-se a negação para dentro.
   - As declarações $\neg\forall x \in U(p(x))$ e $\exists x \in U(\neg p(x))$ são equivalentes.
   - As declarações $\neg\exists x \in U(p(x))$ e $\forall x \in U(\neg p(x))$ são equivalentes.
8. *Grande O.* Dizemos que $f(x) = O(g(x))$ se houver números positivos c e n_0 tais que $f(x) \leq cg(x)$ para cada $x > n_0$.
9. *Grande Θ.* $f(x) = \Theta(g(x))$ significa que $f = O(g(x))$ e $g = O(f(x))$.
10. *Uma notação para conjuntos de números.* Usamos R para representar os números reais, R^+ para representar os números reais positivos, Z para representar os inteiros (positivos, negativos e zero), Z^+ para representar os inteiros positivos e N para representar os inteiros não negativos.

PROBLEMAS

Todos os problemas com asterisco têm uma resposta ou uma dica disponível ao final do livro.

*1. Para quais inteiros positivos x a declaração $(x-2)^2 + 1 \leq 2$ é verdadeira? Para que inteiros ela é verdadeira? Para que números reais ela é verdadeira? Se expandirmos o universo para o qual está considerando uma declaração sobre uma variável, isso sempre aumentará o tamanho da tabela verdade da declaração?

2. A declaração "existe um inteiro maior que 2 tal que $(x-2)^2 + 1 \leq 2$" é verdadeira ou falsa? Como você sabe?

*3. Escreva a declaração "o quadrado de todo número real é maior ou igual a 0" como uma declaração quantificada sobre o universo dos números reais. Você pode usar R para representar o universo dos números reais.

4. Um número primo é definido como um inteiro maior que 1 cujos únicos fatores inteiros positivos são ele mesmo e 1. Encontre duas maneiras de escrever essa definição de modo que todos os quantificadores sejam explícitos. (Pode ser conveniente introduzir uma variável para representar o número e talvez uma variável ou algumas variáveis para os seus fatores.)

5. Escreva a definição de um máximo divisor comum de m e n de modo que todos os quantificadores sejam explícitos e expressos como "para todo" ou "existe". Escreva a parte do teorema estendido do máximo divisor comum de Euclides (Teorema 2.14) que relaciona o máximo divisor comum de m e n algebricamente a m e n. Novamente, cuide para que todos os quantificadores sejam explícitos e expressos como "para todo" ou "existe".

6. Usando $s(x, y, z)$ como a declaração $x = yz$ e $t(x, y)$ como a declaração $x \leq y$, qual é a forma da definição de um máximo divisor comum d de m e n? (Não é preciso incluir referências aos universos para as variáveis.)

7. Qual das seguintes declarações (em que Z^+ representa os inteiros positivos e Z representa todos os inteiros) é verdadeira e qual é falsa? Explique o motivo.
   *a) $\forall z \in Z^+(z^2 + 6z + 10 > 20)$
   *b) $\forall z \in Z(z^2 - z \geq 0)$
   *c) $\exists z \in Z^+(z - z^2 > 0)$
   *d) $\exists z \in Z(z^2 - z = 6)$

*8. Existem quantificadores (implícitos) na declaração "o produto de inteiros ímpares é ímpar"? Se houver, quais são eles?

9. Reescreva a declaração "o produto de inteiros ímpares é ímpar" com todos os quantificadores (incluindo qualquer um na definição de inteiros ímpares) explicitamente indicados como "para todo" e "existe".

*10. Reescreva a declaração a seguir sem quaisquer negativas: "não há um inteiro positivo n tal que, para todos os inteiros $m > n$, todas as equações polinomiais $p(x) = 0$ de grau m não tenham números reais para soluções".

11. Considere as pequenas modificações do Teorema 3.2 a seguir. Para cada parte, prove que ela é verdadeira ou dê um contraexemplo. Considere U_1 como um universo e considere U_2 como outro universo, com $U_1 \subseteq U_2$. Suponha que $q(x)$ seja uma declaração sobre U_2 tal que $U_1 = \{x \mid q(x) \text{ é verdadeiro}\}$ e $p(x)$ seja uma declaração sobre U_2.
   *a) $\forall x \in U_1(p(x))$ é equivalente a $\forall x \in U_2(q(x) \wedge p(x))$.
   *b) $\exists x \in U_1(p(x))$ é equivalente a $\exists x \in U_2(q(x) \Rightarrow p(x))$.

12. Considere que $p(x)$ represente "x é um primo", $q(x)$ represente "x é par" e $r(x, y)$ represente "$x = y$". Use essas três declarações simbólicas e a notação lógica apropriada para escrever a declaração "existe um e somente um primo par". (Use o conjunto Z^+ de inteiros positivos para o seu universo.)

13. Cada uma das expressões a seguir representa uma declaração sobre os inteiros. Usando $p(x)$ para representar "x é primo", $q(x, y)$ para "$x = y^2$", $r(x, y)$ para "$x \leq y$", $s(x, y, z)$ para "$z = xy$" e $t(x, y)$ para "$x = y$", determine quais expressões representam declarações verdadeiras e quais representam declarações falsas.
   *a) $\forall x \in Z(\exists y \in Z(q(x, y) \vee p(x)))$
   *b) $\forall x \in Z(\forall y \in Z(s(x, x, y) \Leftrightarrow q(x, y)))$
   *c) $\forall y \in Z(\exists x \in Z(q(y, x)))$
   *d) $\exists z \in Z(\exists x \in Z(\exists y \in Z(p(x) \wedge p(y) \wedge \neg t(x, y))))$

14. Por que $(\exists x \in U(p(x))) \wedge (\exists y \in U(q(y)))$ não é equivalente a $\exists z \in U(p(z) \wedge q(z))$? As declarações $(\exists x \in U(p(x))) \vee (\exists y \in U(q(y)))$ e $\exists z \in U(p(z) \vee q(z))$ são equivalentes?

*15. Dê um exemplo (em português) de uma declaração que tenha a forma $\forall x \in U(\exists y \in V(p(x, y)))$. (A declaração pode ser uma declaração matemática, uma declaração sobre o dia a dia ou o que você preferir.) Agora escreva (em português) a declaração usando o mesmo $p(x, y)$, mas na forma $\exists y \in V(\forall x \in U(p(x, y)))$. Explique se "para todo" e "existe" podem substituir um ao outro.

3.3 Inferência

Inferência direta (modus ponens) e provas

Nesta seção, falaremos sobre a estrutura lógica das provas. Os exemplos de provas apresentados são escolhidos para ilustrar um conceito no contexto que esperamos que seja familiar. Esses exemplos não são necessariamente a única e melhor maneira de

4. Por fim, se a prova por contradição parece não ser muito diferente da prova por contraposição, você está certo, como mostra o exemplo a seguir.

Prove que, se $x^2 + x - 2 = 0$, então $x \neq 0$.

PROVA Suponha que $x = 0$. Então, $x^2 + x - 2 = 0 + 0 - 2 = -2$, de modo que $x^2 + x - 2 \neq 0$. Assim, pelo princípio da prova por contraposição, se $x^2 + x - 2 = 0$, então $x \neq 0$.

Qualquer prova que use um dos métodos indiretos de inferência, seja contradição ou contraposição, é denominada **prova indireta**. Os quatro exemplos anteriores ilustram as ricas possibilidades que as provas indiretas nos oferecem. É claro que eles também ilustram por que a prova indireta pode ser confusa. Não há uma fórmula definida que usemos na escrita de uma prova por contradição, de modo que não há uma regra que possamos memorizar para formular provas indiretas. Em vez disso, temos que nos perguntar se a suposição do oposto do que tentamos provar gera alguma percepção sobre o motivo para que a suposição não faça sentido. Em caso afirmativo, temos a base de uma prova indireta. O modo como escolhemos escrever essa prova é uma questão de escolha pessoal.

EXERCÍCIO 3.3-4 Sem extrair raízes quadradas, prove que, se n é um inteiro positivo tal que $n^2 < 9$, então $n < 3$. É possível usar as regras da álgebra para lidar com as inequações.

EXERCÍCIO 3.3-5 Prove que $\sqrt{5}$ não é racional.

Para provar a declaração no Exercício 3.3-4, suponha que, para fins de contradição, $n \geq 3$. Elevando os dois lados da equação ao quadrado, obtemos

$$n^2 \geq 9,$$

que contradiz nossa hipótese de que $n^2 < 9$. Portanto, pelo princípio da prova por contradição, $n < 3$.

Para provar a declaração no Exercício 3.3-5, supomos, para fins de contradição, que $\sqrt{5}$ é racional. Isso significa que ele pode ser expresso como a fração m/n, em que m e n são inteiros. Elevando os dois lados da equação $m/n = \sqrt{5}$, obtemos

$$\frac{m^2}{n^2} = 5,$$

ou

$$m^2 = 5n^2.$$

Agora, m^2 deverá ter um número par de fatores primos (contando cada fator primo tantas vezes quantas ele ocorra), assim como n^2. Mas $5n^2$ tem um número ímpar de fatores primos. Assim, um produto de um número par de fatores primos é igual a um produto de um número ímpar de fatores primos. Isso é uma contradição, pois cada inteiro positivo precisa ser expresso exclusivamente como um produto de números primos (positivos). Assim, pelo princípio da prova por contradição, $\sqrt{5}$ não é racional.

CONCEITOS, FÓRMULAS E TEOREMAS IMPORTANTES

1. *Princípio da inferência direta ou modus ponens.* A partir de p e $p \Rightarrow q$, podemos concluir q.
2. *Princípio da prova condicional.* Se supondo p podemos provar q, então a declaração $p \Rightarrow q$ é verdadeira.
3. *Princípio da generalização universal.* Se podemos provar uma declaração sobre x supondo que x seja um membro do nosso universo, então podemos concluir que ela é verdadeira para todo membro do nosso universo.
4. *Regras de inferência.* As 12 regras de inferência a seguir aparecem neste capítulo:
5. *A partir de um exemplo x que não satisfaz p(x), podemos concluir ¬p(x).*
   5. A partir de $p(x)$ e $q(x)$, podemos concluir $p(x) \wedge q(x)$.
   6. A partir de $p(x)$ ou $q(x)$, podemos concluir $p(x) \vee q(x)$.
   7. A partir de $q(x)$ ou $\neg p(x)$, podemos concluir $p(x) \Rightarrow q(x)$.
   8. A partir de $p(x) \Rightarrow q(x)$ e $q(x) \Rightarrow p(x)$, podemos concluir $p(x) \Leftrightarrow q(x)$.
   9. A partir de $p(x)$ e $p(x) \Rightarrow q(x)$, podemos concluir $q(x)$.
   10. A partir de $p(x) \Rightarrow q(x)$ e $q(x) \Rightarrow r(x)$, podemos concluir $p(x) \Rightarrow r(x)$.
   11. Se podemos derivar $q(x)$ a partir da hipótese de que x satisfaz $p(x)$, então podemos concluir $p(x) \Rightarrow q(x)$.
   12. Se podemos derivar $p(x)$ a partir da hipótese de que x é um membro (genérico) do nosso universo U, podemos concluir $\forall x \in U(p(x))$.
   13. A partir de um exemplo de um $x \in U$ satisfaz $p(x)$, podemos concluir $\exists x \in U(p(x))$.
   14. A partir de $\neg q(x) \Rightarrow \neg p(x)$, podemos concluir $p(x) \Rightarrow q(x)$.
   15. Se a partir da suposição sobre $p(x)$ e $\neg q(x)$ podemos derivar tanto $r(x)$ quanto $\neg r(x)$ para uma declaração r, então podemos concluir $p(x) \Rightarrow q(x)$.
6. *Contrapositiva de $p \Rightarrow q$.* A contrapositiva da declaração $p \Rightarrow q$ é a declaração $\neg q \Rightarrow \neg p$.
7. *Inversa de $p \Rightarrow q$.* A inversa da declaração $p \Rightarrow q$ é a declaração $q \Rightarrow p$.
8. *Regra de inferência contrapositiva.* A partir de $\neg q \Rightarrow \neg p$, podemos concluir $p \Rightarrow q$.
9. *Princípio da prova por contradição.* Se, por assumir p e $\neg q$, pudermos derivar tanto r quanto $\neg r$ para uma declaração r, então podemos concluir $p \Rightarrow q$.

PROBLEMAS

Todos os problemas com asterisco têm uma resposta ou uma dica disponível ao final do livro.

1. Escreva a inversa e a contrapositiva de cada uma destas declarações:

*a) Se a mangueira tem 60 m, então a mangueira chegará até os tomates.
*b) George vai passear somente se Mary for passear.
*c) Pâmela recita um poema se André tiver pedido um poema.

2. Construa uma prova de que, se m é ímpar, então m^2 é ímpar.
3. Construa uma prova de que, para todos os inteiros m e n, se m é par e n é ímpar, então $m + n$ é ímpar.
*4. O que realmente significa dizer "prove que, se m é ímpar e n é ímpar, então $m + n$ é par"? Prove esta declaração.
5. Prove que, para todos os inteiros m e n, se m é ímpar e n é ímpar, então mn é ímpar.
*6. A declaração $p \Rightarrow q$ é equivalente à declaração $\neg p \Rightarrow \neg q$?
*7. Construa uma prova contrapositiva de que, para todos os números reais, se $x^2 - 2x \neq -1$, então $x \neq 1$.
8. Construa uma prova por contradição de que, para todos os números reais x, se $x^2 - 2x \neq -1$, então $x \neq 1$.
*9. Prove que, se $x^3 > 8$, então $x > 2$.
10. Prove que $\sqrt{3}$ é irracional.
*11. Construa uma prova de que, se m é um inteiro tal que m^2 é par, então m é par.
*12. Prove ou conteste a seguinte declaração: "para todo inteiro positivo n, se n é primo, então 12 e $n^3 - n^2 + n$ têm um fator comum maior que 1".
13. Prove ou conteste a seguinte declaração: "Para todos os inteiros b, c e d, se x é um número racional tal que $x^2 + bx + c = d$, então x é um inteiro". (*Dicas:* Todos os quantificadores são dados explicitamente? É possível, mas não necessário, usar a fórmula quadrática.)
*14. Prove que não existe um número primo maior do que todos.
15. Prove que, se f, g e h são funções de R^+ a R^+ tais que $f(x) = O(g(x))$ e $g(x) = O(h(x))$, então $f(x) = O(h(x))$.

INDUÇÃO, RECURSÃO E RECORRÊNCIA 4

4.1 Indução matemática

Contraexemplos menores

Na Seção 3.3, demonstramos um modo de provar declarações sobre universos infinitos. Consideramos um membro "genérico" do universo e derivamos a declaração desejada sobre esse membro. Quando nosso universo é o universo dos inteiros, ou quando ele está em uma correspondência biunívoca com os inteiros, existe uma segunda técnica que podemos usar.

Lembre-se da nossa prova do teorema da divisão de Euclides (Teorema 2.12), que diz que, quando n é um inteiro positivo, para cada inteiro não negativo m, existem inteiros exclusivos não negativos q e r tais que $m = nq + r$ e $0 \leq r < n$. Para o propósito de uma prova por contradição, consideramos que existe um inteiro não negativo m para o qual não existem q e r. Escolhemos um menor como m e observamos que $m - n$ é um inteiro não negativo menor que m. Depois dissemos:

> Portanto, existem inteiros q' e r' tais que $m - n = nq' + r'$ com $0 \leq r < n$. Mas então $m = n(q' + 1) + r'$. Assim, considerando $q = q' + 1$ e $r = r'$, obtemos $m = qn + r$ com $0 \leq r < n$. Isso contradiz a hipótese de que não existem inteiros q e r com $0 \leq r < n$ tais que $m = qn + r$. Assim, pelo princípio da prova por contradição, esses inteiros q e r existem.

Para analisar essas sentenças, considere que $p(m)$ indique a declaração "existem inteiros q' e r' tais que $m - n = nq' + r'$ com $0 \leq r < n$". As duas primeiras sentenças da citação oferecem uma prova de que $p(m - n) \Rightarrow p(m)$. Essa implicação é decisiva para a prova. Façamos uma análise da prova, que mostra a regra principal dessa implicação.

- Consideramos que havia um contraexemplo com um menor m.[1]
- Usando o fato de que $p(m')$ tinha de ser verdadeiro para cada m' menor que m, escolhemos $m' = m - n$ e observamos que $p(m')$ tinha de ser verdadeiro.
- Usamos a implicação $p(m - n) \Rightarrow p(m)$ para concluir a verdade de $p(m)$.
- Porém, consideramos que $p(m)$ era falso, de modo que essa hipótese é contestada na prova por contradição.

1 Os inteiros não negativos são bem ordenados.