Métodos de Contagem

Notas de aula

Resumo

Estas notas foram escritas como suporte para a disciplina "*Matemática Discreta II - SMA 181*" do ICMC-USP. Elas estão baseadas nas referências [1] e, principalmente, [2] e contêm a primeira parte da ementa referente a métodos de contagem.

O primeiro capítulo destas notas trata de permutações, combinações, distribuições e do Princípio da Casa do Pombo. No Capítulo 2, que é pré-requisito para os capítulos seguintes, apresentamos a teoria sobre funções geradoras e enumeradores. O Capítulo 3 é dedicado ao estudo de relações de recorrência e o Capítulo 4 é dedicado ao estudo do Princípio de Inclusão e Exclusão e suas conseqüências como, por exemplo, desarranjos. No Capítulo 5, tratamos da teoria de contagem devida a G. Pólya.

Sumário

1 Métodos de contagem **1**
- 1 Introdução . . . 1
- 2 Princípios fundamentais . . . 1
- 3 Permutações . . . 2
  - 3.1 Permutações de objetos distintos . . . 2
  - 3.2 Permutações de objetos nem todos distintos . . . 4
  - 3.3 Permutações de objetos distintos com repetições . . . 4
- 4 Combinações . . . 5
  - 4.1 Combinações de objetos distintos . . . 5
  - 4.2 Combinações de objetos distintos com repetições . . . 7
  - 4.3 Combinações de objetos nem todos distintos . . . 8
- 5 Distribuições de objetos . . . 8
  - 5.1 Distribuições de objetos distintos . . . 8
  - 5.2 Distribuições de objetos nem todos distintos . . . 10
  - 5.3 Distribuições de objetos indistintos . . . 10
- 6 O Princípio da Casa do Pombo . . . 11

2 Funções geradoras **17**
- 1 Introdução . . . 17
- 2 Funções geradoras para combinações . . . 18
- 3 Enumeradores para permutações . . . 21

3 Relações de recorrência **28**
- 1 Introdução . . . 28
- 2 Método da iteração . . . 29
- 3 Relações de recorrência lineares com coeficientes constantes . . . 30
  - 3.1 Relações de recorrência lineares homogêneas . . . 31
  - 3.2 Relações de recorrência lineares não-homogêneas . . . 36
- 4 Método das funções geradoras . . . 38

4 O Princípio de Inclusão e Exclusão **43**
- 1 Introdução . . . 43
- 2 O Princípio da Inclusão e Exclusão . . . 43

3 A fórmula geral 48
4 Desarranjos 53

5 Teoria de contagem de Pólya **59**
1 Introdução 59
2 Noções de relações e grupos 60
3 Classes de equivalência sob um grupo de permutação 61
4 Classes de equivalências de funções 67
5 Pesos e inventários de funções 69
6 Teorema Fundamental de Pólya 73

Capítulo 1

Métodos de contagem

1 Introdução

O problema de contagem de objetos está presente em muitos problemas discretos. Por exemplo, a fim de se estimar o tempo que certo algoritmo leva para ser "rodado", precisa-se contar o número de vezes que determinadas rotinas são executadas. Quando seqüências binárias são usadas para representar símbolos, um engenheiro de software pode querer saber o número de representações diferentes geradas por um número finito de $0's$ e $1's$. Um cientista de computação pode querer saber o número de movimentos possíveis que seu programa de xadrez deve examinar para responder a cada movimento do oponente.

2 Princípios fundamentais

Usaremos as palavras *seleção* e *arranjo* no seu sentido usual. Assim não deve haver ambigüidade em sentenças como:

Selecionemos 2 candidatos a representantes discentes entre 6 alunos.

Existem 15 maneiras de selecionarmos 2 candidatos a representantes discentes entre 6 alunos.

Arranje os 4 CD's na prateleira.

Existem 24 modos de se arranjar 4 CD's na prateleira.

Usaremos a palavra *combinação* como sinônimo de *seleção* e a palavra *permutação* como sinônimo de *arranjo*. As seleções ou combinações levam em conta somente a *natureza* dos objetos enquanto que os arranjos ou permutações consideram tanto a *natureza* quanto a *ordem* dos objetos.

Sejam n e r números inteiros positivos. Em todo este capítulo e nos seguintes, vamos denotar por $C(n, r)$ uma r-combinação de n objetos definida como sendo uma seleção não-ordenada de r dos n objetos. Tais objetos podem ser distintos ou indistintos e podemos considerar repetições ou não. Analogamente, vamos denotar por $P(n, r)$ uma r-permutação de n objetos definida como sendo um arranjo ordenado de r destes n objetos. Novamente, tais objetos podem ser distintos ou indistintos e podemos considerar repetições ou não.

Agora, consideremos um exemplo.

Exemplo 1.1. *Consideremos as seguintes letras romanas a, b, c e as seguintes letras gregas* α, μ, κ, φ, ξ. *Então*

- *existem* $3 \times 5 = 15$ *modos de selecionarmos uma letra romana* **e** *uma letra grega;*
- *existem* $3 + 5 = 8$ *modos de selecionarmos uma letra que seja romana* ***ou*** *grega.*

As regras que acabamos de usar no exemplo acima estão descritas formalmente a seguir.

Regra do produto. Se um evento pode ocorrer m vezes e um outro evento pode ocorrer n vezes, então existem $m \times n$ modos de ocorrerem ambos os eventos.

Regra da soma. Se um evento pode ocorrer m vezes e um outro evento pode ocorrer n vezes, então existem $m + n$ modos de ocorrer um destes eventos.

Observação 1.2. *A ocorrência de um evento significa que a seleção ou arranjo de um determinado número de objetos foi feita.*

Exemplo 1.3. *Consideremos 5 livros escritos em inglês e distintos, 7 livros escritos em japonês e distintos e 10 livros escritos em francês e distintos. Então existem* 5×7 *modos de escolhermos um livro em inglês e um em japonês,* 5×10 *modos de escolhermos um livro em inglês e um em francês, e* 7×10 *modos de escolhermos um livros em japonês e um em francês. Portanto existem*

$$5 \times 7 + 5 \times 10 + 7 \times 10 = 155$$

modos de escolhermos 2 livros de línguas diferentes. Por outro lado, existem

$$22 \times 21 = 462$$

maneiras de escolhermos 2 livros quaisquer (um depois o outro) entre os 22 livros.

Exemplo 1.4. *Pela regra do produto, uma r-permutação de n objetos <u>distintos</u> pode ser considerada como uma seleção de r objetos entre n objetos seguida de um arranjo dos r objetos selecionados, ou seja,*

$$\boxed{P(n,r) = C(n,r) \times P(r,r).}$$

3 Permutações

A seguir, vamos deduzir uma fórmula para $P(n,r)$ e, na seção seguinte, consideraremos combinações $C(n,r)$.

3.1 Permutações de objetos distintos

Consideremos inteiros positivos n e r tais que $r < n$. Como a ordem dos objetos num arranjo deve ser levada em conta, segue que, quando arranjamos r entre n objetos distintos, devemos considerar que cada objeto "ocupa" uma posição determinada. Deste modo, existem n modos de ocuparmos a primeira posição. Depois de ocupada a primeira posição, podemos ocupar a segunda posição de $n-1$ modos diferentes. Similarmente, depois de ocupada a segunda posição (e também a primeira), podemos ocupar a terceira posição de $n-2$ modos diferentes e assim por diante até chagarmos à r-ésima posição. Finalmente a r-ésima posição pode ser ocupada de $n-(r-1) = n-r+1$ modos diferentes. Daí, pela regra do produto, concluímos que

Teorema 1.5. *Se r e n são inteiros positivos com $r < n$, então o número de r-permutações de n objetos distintos é*

$$P(n,r) = n(n-1)\dots(n-r+1),$$

ou seja,

$$\boxed{P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

Definimos $P(n,0) = 0$ para qualquer inteiro n não-negativo.

Exemplo 1.6. *O número de maneiras pelas quais podemos arranjar 5 entre 7 objetos distintos é*

$$P(7,5) = \frac{7!}{(7-5)!} = \frac{7!}{2!} = 2520.$$

A seguir, apresentamos uma fórmula para $P(n,n)$.

Teorema 1.7. *A n-permutação de n objetos distintos é dada por*

$$\boxed{P(n,n) = n!}$$

Demonstração. Mostremos a tese por indução. É claro que $P(1,1) = 1 = 1!$. Suponhamos que $P(n-1,n-1) = (n-1)!$ e provemos que $P(n,n) = n!$. Para arranjarmos n objetos em ordem, basta tomarmos um determinado objeto e arranjarmos os demais $n-1$. Para cada arranjo dos $n-1$ objetos, existem n posições possíveis para o objeto tomado. Logo, pela regra do produto,

$$P(n,n) = n \cdot P(n-1,n-1) = n \cdot (n-1)! = n!$$

e a prova está completa. □

Exemplo 1.8. *O número de maneiras pelas quais n pessoas podem se posicionar em fila é $P(n,n) = n!$*

Exemplo 1.9. *De quantos modos n pessoas podem se posicionar em pé formando um círculo?*

Pelo exemplo anterior, $P(n,n) = n!$ é o número de arranjos que podem ser feitos para enfileirar n pessoas. Porém, para arranjarmos as pessoas em círculo, somente as posições relativas das pessoas são importantes, pois consideramos iguais quaisquer 2 arranjos que podem ser obtidos um através do outro por rotação. Desta forma, o número de arranjos circulares é

$$\frac{P(n,n)}{n} = \frac{n(n-1)!}{n} = (n-1)!$$

3.2 Permutações de objetos nem todos distintos

Até o momento, consideramos que os objetos que queremos arranjar podem ser distinguidos um do outro de alguma forma. Agora, vamos considerar objetos nem todos distintos entre si.

O teorema seguinte generaliza a idéia do Exemplo 1.9 acima.

Teorema 1.10. *Sejam n objetos não todos distintos entre si. Destes n objetos, sejam q_1 do primeiro tipo, q_2 do segundo tipo, ... e q_t do t-ésimo tipo. Então o número de n-permutações destes n objetos é*

$$\boxed{P(n,n) = \frac{n!}{q_1!q_2!\dots q_t!}} \tag{1.1}$$

Demonstração. Imaginemos que os n objetos são "marcados" de forma que possamos distinguir cada um dos objetos do mesmo tipo. Então, pelo Teorema 1.7, existem $n!$ modos de permutarmos estes objetos "*distintos*". Mas duas permutações serão iguais sempre que, ao "tirarmos" as marcas dos objetos do mesmo tipo, os arranjos feitos forem iguais. Portanto uma permutação de objetos não-marcados corresponde a $q_1!q_2!\dots q_t!$ permutações de objetos marcados e temos a fórmula (1.1). (Reveja o Exemplo 1.9.) □

Exemplo 1.11. *O número de arranjarmos 3 segmentos e 4 pontos é*

$$\frac{7!}{3!4!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2} = 7\cdot 5 = 35.$$

3.3 Permutações de objetos distintos com repetições

A seguir, vamos considerar repetições de objetos distintos.

Teorema 1.12. *Sejam r e n inteiros positivos. O número de maneiras pelas quais podemos arranjar r objetos entre n objetos distintos de forma que possam haver* ***repetições*** *é*

$$\overbrace{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}^{r\ vezes},$$

isto é,

$$\boxed{P(n,r) = n^r.}$$

Demonstração. Segue diretamente aplicando-se a regra do produto, uma vez que há n modos de escolhermos um objeto para ocupar a primeira posição, n modos de escolhermos um objeto para ocupar a segunda posição e assim por diante até a r-ésima posição. □

Observação 1.13. *Em geral, temos $r > n$ no Teorema 1.12. Veja o exemplo a seguir.*

Exemplo 1.14. *Dos 10 bilhões de números entre 1 e 10.000.000.000, quantos números contém o algarismo 1 e quantos não contém?*

Consideremos os 9 algarismos 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, e 9. A posição das unidades pode ser ocupada por um destes algarismos de 9 modos diferentes; a posição das dezenas também pode *ser ocupada de* 9 *modos diferentes e assim por diante. Então, dos* 10 *bilhões de números entre* 0 *e* 9.999.999.999*, existem*

$$\overbrace{9 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 9}^{10 \text{ vezes}}$$

ou seja,

$$9^{10}$$

números que não contém o algarismo 1*. Portanto, entre os números* 1 *e* 10.000.000.000*, existem*

$$9^{10} - 1$$

números que não contém o algarismo 1 *(já que o número* 10.000.000.000 *contém o algarismo* 1 *e não estava sendo contado entre* 0 *e* 9.999.999.999*). Logo*

$$10^{10} - (9^{10} - 1)$$

números entre 1 *e* 10.000.000.000 *contém o algarismo* 1*.*

4 Combinações

4.1 Combinações de objetos distintos

Em vista do Exemplo 1.4 e dos Teoremas 1.7 e 1.5, podemos considerar o resultado seguinte.

Se n e r são inteiros positivos, então escrevemos

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Teorema 1.15. *Sejam r e n inteiros positivos. O número de r-combinações de n objetos distintos é dado por*

$$\boxed{C(n,r) = \frac{P(n,r)}{P(r,r)} = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}, \quad r < n}$$

ou seja

$$\boxed{C(n,r) = \binom{n}{r}, \quad r < n}$$

e

$$\boxed{C(n,n) = 1}$$

Definimos $C(n,0) = 0$ para todo o inteiro n não-negativo.

Observação 1.16. *É imediato que*

$$\boxed{C(n, r) = C(n, n - r)}$$

o que é de se esperar uma vez que selecionar r *objetos entre* n *objetos distintos é equivalente a "tirar" os* $n - r$ *objetos que não serão selecionados.*

Exemplo 1.17. *Consideremos um decágono convexo com a seguinte propriedade: quaisquer três diagonais não se interceptam num mesmo ponto dentro do decágono. Em quantos segmentos as diagonais são divididas pelas suas intersecções?*

Em primeiro lugar, vamos calcular o número de diagonais. Temos 10 *vértices que devem ser unidos dois a dois. Portanto temos* $C(10, 2)$ *segmentos unindo os* 10 *vértices. Mas 10 destes segmentos são os lados do decágono. Logo o número de diagonais é*

$$C(10, 2) - 10 = \frac{10!}{2!(10-2)!} - 10 = \frac{10 \cdot 9}{2} - 10 = 35.$$

Com a ajuda de uma figura, você poderá notar que, a cada 4 vértices, podemos contar exatamente uma intersecção entre diagonais. Assim concluímos que existem $C(10, 4) = 210$ *intersecções entre as diagonais. E como cada ponto de intersecção pertence a duas diagonais, temos*

$$2 \cdot 210 = 420$$

pontos de intersecção.

Finalmente, se uma diagonal tem k *pontos de intersecção, então ela é dividida em* $k + 1$ *segmentos. Logo as* 35 *diagonais são divididas em*

$$420 + 35 = 455$$

segmentos.

Exemplo 1.18. *De quantos modos podemos selecionar* 3 *números entre* $1, 2, 3, \ldots, 300$ *de forma que sua soma seja divisível por* 3*?*

Em primeiro lugar, podemos dividir os 300 *números* $1, 2, \ldots, 300$ *em* 3 *grupos:*

- *Grupo 1 dos números que são divisíveis por* 3*,*
- *Grupo 2 dos números cujo resto é* 1 *quando divididos por* 3*,*
- *Grupo 3 dos números cujo resto é* 2 *quando divididos por* 3*.*

Existem 100 *números em cada um destes grupos. Além disso, em cada uma das seleções de* 3 *números abaixo, a soma dos números selecionados é divisível por* 3*. Vejamos*

- 3 *objetos do Grupo 1;*
- 3 *objetos do Grupo 2;*
- 3 *objetos do Grupo 3;*

- 1 *objetos de cada grupo.*

Em qualquer outro tipo de seleção de 3 *números, a soma dos números não é divisível por* 3. *Portanto existem*

$$C(100,3) + C(100,3) + C(100,3) + 100 \cdot 100 \cdot 100 = 1.485.100$$

modos de selecionarmos 3 *números entre os números* $1, 2, \dots, 300$ *de forma que sua soma seja divisível por* 3.

4.2 Combinações de objetos distintos com repetições

Agora, vamos considerar que podem haver repetições na seleção de objetos distintos.

Lembramos o leitor que a notação $C(n, r)$ que adotamos para r-combinações de n objetos, é independente de termos objetos distintos ou não e de haverem repetições. Assim, **não** se tem necessariamente $C(n, r) = \binom{n}{r}$ como é o caso do Teorema 1.15.

Teorema 1.19. *O número de maneiras pelas quais podemos selecionar* r *objetos entre* n *objetos distintos de forma que possam haver* ***repetições*** *é*

$$\boxed{C(n,r) = \binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}.} \tag{1.2}$$

Demonstração. Identifiquemos os n objetos pelos números 1, 2, $\dots$, n. Selecionemos r entre estes objetos e consideremos os inteiros i, j, $\dots$, m correspondentes arranjados em ordem crescente. A seguir, somamos 0 ao primeiro destes r inteiros, 1 ao segundo destes r inteiros e assim por diante até somarmos $r - 1$ ao r-ésimo inteiro. Deste modo, continuamos com uma lista de r inteiros i, $j + 1$, $\dots$, $m + (r - 1)$ em ordem crescente, e podemos ver esta lista como uma seleção de r inteiros entre os inteiros 1, 2, $\dots$, $n + (r - 1)$. Portanto temos uma r-combinação de $n + r - 1$ objetos distintos o que equivale a (1.2). □

Observação 1.20. *Em geral, temos* $r > n$ *no Teorema 1.19 como mostra o exemplo seguinte. Mas sempre temos* $n + (r - 1) > r$.

Exemplo 1.21. *Consideremos muitas moedas de* 1, 5, 10 *e* 25 *centavos. Queremos selecionar* 6 *moedas. Com a notação do Teorema 1.19, temos* $n = 4$ *e* $r = 6$. *Então podemos selecionar* 6 *moedas de*

$$\binom{4+6-1}{6} = \binom{9}{6} = \frac{9!}{6!3!} = 84$$

modos.

Exemplo 1.22. *Quando* 3 *dados distintos são jogados, o número de "saídas" é*

$$6 \cdot 6 \cdot 6 = 216.$$

Se os 3 *dados são idênticos, então o número de saídas é dado por*

$$C(6 + 3 - 1, 3) = C(8, 3) = 56,$$

pois serão selecionados 3 *números, com repetições, entre os números* 1, 2, 3, 4, 5, 6.

4.3 Combinações de objetos nem todos distintos

A seguir, vamos considerar objetos nem todos distintos entre si.

Teorema 1.23. *Sejam n objetos não todos distintos entre si. Destes n objetos, sejam q_1 do primeiro tipo, q_2 do segundo tipo e assim por diante até q_t objetos do t-ésimo tipo. Então o número de maneiras pelas quais podemos selecionar um ou mais objetos é*

$$\boxed{(q_1+1)(q_2+1)\cdot\ldots\cdot(q_t+1)-1.} \tag{1.3}$$

Demonstração. Segue diretamente da regra do produto. Podemos escolher nenhum, um, dois ou q_1 objetos do primeiro tipo. Logo existem q_1+1 modos de escolhermos objetos do primeiro tipo. De modo análogo, existem q_2+1 modos de escolhermos objetos do segundo tipo e assim por diante. A parcela -1 corresponde à seleção de nenhum objeto que deve ser "descontada". □

Exemplo 1.24. *Quantos divisores tem o número* 1400*?*

Fatorando 1400 *temos*

$$1400 = 2^3\cdot 5^2\cdot 7.$$

Assim temos 3 *fatores correspondentes ao número* 2*,* 2 *fatores correspondentes ao número* 5 *e* 1 *fator correspondente ao número* 7*. Portanto $q_1=3$, $q_2=2$ e $q_3=1$. Logo existem*

$$(3+1)(2+1)(1+1)-1=23$$

modos de selecionarmos um ou mais números entre os fatores primos 2, 5, 7 *que, multiplicados entre si, geram os divisores de* 1400*. Mas* 1 *também é divisor de* 1400*. Portanto o número de divisores de* 1400 *é*

$$23+1=24.$$

5 Distribuições de objetos

5.1 Distribuições de objetos distintos

Vamos discutir a distribuição de objetos distintos em posições distintas.

Na seção sobre permutações, introduzimos o conceito de se colocar objetos distintos em "lugares" ou "células" diferentes dando, assim, uma ordem aos objetos. Se $n\geq r$, então existem $P(n,r)=\dfrac{n!}{(n-r)!}$ modos de arranjarmos r objetos distintos em n lugares diferentes. Deste modo, cada lugar tem no máximo 1 objeto. Por outro lado, se $r\geq n$, então $P(r,n)$ é o número de maneiras pelas quais podemos arranjar n entre r objetos distintos em n lugares. Neste caso, cada lugar terá um único objeto.

Quando $n\geq r$, a distribuição de r objetos distintos em n lugares distintos, onde cada lugar pode ter qualquer número de objetos, é equivalente à r-permutação de n objetos com repetições, isto é, n^r é o número de maneiras pelas quais podemos arranjar r objetos em n lugares com repetições. Quando consideramos o caso em que $r\geq n$, então a distribuição de r objetos distintos em n lugares distintos, onde cada lugar pode ter qualquer número de objetos, é tal que o primeiro objeto pode ser colocado em qualquer dos n lugares, o segundo objeto pode ser colocado em qualquer dos n lugares e assim por diante. Portanto o número de modos de colocarmos r objetos distintos em n lugares distintos, onde $r \geq n$, é n^r. Assim, podemos concluir que

Teorema 1.25. *Se r e n são dois inteiros positivos quaisquer, então existem n^r modos de colocarmos r objetos distintos em n lugares distintos cada um contendo qualquer número de objetos.*

No Teorema 1.25, quando mais do que um objetos são colocados no mesmo lugar, os objetos não estão ordenados neste lugar. Quando a ordem nos lugares é levada em consideração, o número de maneiras de distribuirmos os objetos é dado pelo resultado seguinte.

Teorema 1.26. *Consideremos a distribuição de r objetos distintos em n lugares distintos com qualquer número de objetos, onde a ordem nos lugares é levada em consideração. Então o número de maneiras de distribuirmos os objetos é*

$$\boxed{\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!} = (n+r-1)(n+r-2)\cdot \ldots \cdot (n+1)\cdot n.}$$

Demonstração. Existem n modos de distribuirmos o primeiro objeto num lugar. Como cada lugar pode ter qualquer número de objetos, depois que o primeiro objeto é colocado, podemos consider o lugar onde ele está como um "sublugar" ou "subcélula" que divide um dos n lugares em dois. Assim existem $n+1$ modos de distribuirmos o segundo objeto. De modo análogo, existem $n+2$ modos de distribuirmos o terceiro objeto e assim por diante até o r-ésimo objeto que pode ser distribuído de $n+r-1$ maneiras. Logo existem

$$n\cdot (n+1)(n+2)\cdot \ldots \cdot (n+r-1)$$

maneiras de distribuirmos r objetos distintos em n lugares distintos com qualquer número de objetos. □

Exemplo 1.27. *Consideremos 7 bandeiras e 5 mastros. Qual o número de modos de arranjarmos as bandeiras nos mastros sendo que nem todos os mastros precisam ter bandeiras?*

Primeiramente, notemos que um mastro pode ter mais do que uma bandeira: iça-se a primeira até o topo e coloca-se outra bandeira logo abaixo da primeira e assim por diante. Portanto a ordem das bandeiras nos mastros é importante. Temos $n = 5$ e $r = 7$ e, pelo Teorema 1.25, o número de modos de distribuirmos 7 bandeiras em 5 mastros é

$$\frac{(5+7-1)!}{(5-1)!} = 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5.$$

Este também é o número de modos de distribuirmos 7 carros em 5 cabines de pedágio.

5.2 Distribuições de objetos nem todos distintos

Consideremos a distribuição de n objetos, onde q_1 destes objetos são do primeiro tipo, q_2 são do segundo tipo e assim por diante até q_t objetos do t-ésimo tipo. A distribuição destes n objetos em n lugares, cada um dos quais pode ter um único objeto, é equivalente a fazermos uma permutação destes objetos. Assim, podemos enunciar o teorema seguinte.

Teorema 1.28. *Consideremos n objetos, onde q_1 destes objetos são do primeiro tipo, q_2 são do segundo tipo e assim por diante até q_t objetos t-ésimo tipo. Então o número de distribuições dos n objetos é dado por*

$$\boxed{\frac{n!}{q_1!q_2! \cdot \ldots \cdot q_t!}.}$$

Teorema 1.29. *Consideremos r objetos, onde q_1 destes objetos são do primeiro tipo, q_2 são do segundo tipo, ... e q_t são do t-ésimo tipo. Então o número de distribuições dos r objetos em n lugares distintos, $n \geq r$, é dado por*

$$\boxed{\frac{n!}{q_1!q_2! \cdot \ldots \cdot q_t!} \frac{1}{(n-r)!}.}$$

Demonstração. Basta notarmos que distribuir r objetos em n lugares distintos é equivalente a selecionar r lugares de n lugares e distribuir os r objetos nestes r lugares, ou seja,

$$\binom{n}{r} \cdot \frac{r!}{q_1!q_2! \cdot \ldots \cdot q_t!} = \frac{n!}{q_1!q_2! \cdot \ldots \cdot q_t!} \frac{1}{(n-r)!}$$

e segue a tese. □

5.3 Distribuições de objetos indistintos

Sejam r e n inteiros positivos. Se $n \geq r$, então a distribuição de r objetos não-distintos ou indistintos em n lugares distintos com no máximo um objeto em cada lugar pode ser vista como a seleção de r lugares dos n lugares para os r objetos não-distintos. Logo o número de distribuições de r objetos não-distintos em n lugares distintos é $C(n, r)$.

Teorema 1.30. *Sejam r e n inteiros positivos com $n \geq r$. Então o número de modos de colocarmos r objetos não-distintos em n lugares onde um lugar pode ter mais do que um objeto é*

$$\boxed{\binom{n+r-1}{r}.}$$

Quando nenhum dos lugares pode ficar vazio (i.e., $n \leq r$), a distribuição de r objetos não-distintos em n lugares distintos é dada por

$$\boxed{\binom{r-1}{n-1}.}$$

Demonstração. A primeira afirmação segue do fato de que distribuirmos r objetos não-distintos é equivalente a selecionarmos r dos n lugares para os r objetos com a possibilidade de repetições das seleções dos lugares (veja o Teorema 1.19).

Com respeito à segunda afirmação temos que, se colocarmos um objeto em cada um dos n lugares e depois colocarmos os outros $r-n$ objetos arbitrariamente, então o número de distribuições de r objetos não-distintos em n lugares distintos será

$$\binom{n+(r-n)-1}{r-n} = \binom{r-1}{r-n} = \binom{r-1}{n-1}$$

onde usamos o Teorema 1.19 para a distribuição dos $r-n$ objetos e a Observação 1.16 para obtermos a segunda igualdade. □

Como conseqüência do Teorema 1.30, temos o corolário seguinte.

Corolário 1.31. *O número de distribuições de r objetos não-distintos em n lugares distintos, onde cada lugar tem pelo menos q objetos, é dado por*

$$\boxed{\binom{n+(r-nq)-1}{r-nq} = \binom{n-nq+r-1}{n-1}}$$

Exemplo 1.32. *Cinco letras devem ser transmitidas por um canal de comunicações sendo que 15 espaços devem ser inseridos entre as letras com pelo menos três espaços entre quaisquer duas letras. Qual o número de modos que as letras e os espaços podem ser arranjados?*

Sabemos que existem $5!$ *maneiras de arranjarmos as letras. Para cada arranjo de letras, podemos considerar a inserção de espaços como a colocação de* 15 *objetos não-distintos em* 4 *lugares distintos que são as* 4 *posições entre as letras. Conforme a notação do Corolário 1.31, temos* $r=15$, $n=4$ *e* $q=3$. *Portanto pela regra do produto e pelo Corolário 1.31, o número de modos de arranjarmos as letras e os espaços é*

$$5! \times \binom{15-4\cdot 3+4-1}{4-1} = 5! \times \binom{6}{3} = 2400.$$

6 O Princípio da Casa do Pombo

Apresentaremos três versões do Princípio da Casa do Pombo que também é conhecido como Princípio da Caixa de Sapatos ou Princípio da Gaveta de Dirichlet. O Princípio da Casa do Pombo é utilizado para responder questões como: "*Existe algum elemento satisfazendo determinada propriedade?*".

Teorema 1.33 (Princípio da Casa do Pombo - versão 1). *Se n pombos voam para k casas de pombos e $k<n$, então alguma casa contém pelo menos* 2 *pombos.*

Demonstração. Suponhamos que a afirmação seja falsa. Então cada casa tem no máximo um pombo. Logo existem k pombos o que contradiz a hipótese. □

Exemplo 1.34. *Consideremos* 10 *pessoas com primeiros nomes Alice, Bernardo, Carlos e Elisa e com sobrenomes Rodrigues e Nogueira. Então pelo menos duas pessoas têm os mesmos primeiro nome e sobrenome. De fato. Existem* $4 \cdot 2 = 8$ *possibilidades de nomes para as* 10 *pessoas. Se fizermos uma analogia das pessoas com os pombos e dos nomes com as casas de pombo, então* $n = 10$ *e* $k = 8$ *e, pelo Princípio da Casa do Pombo, pelo menos* 2 *pessoas têm os mesmos primeiro nome e sobrenome.*

Notação. Escrevemos $|X|$ para denotar o número de elementos de um conjunto finito X.

Teorema 1.35 (Princípio da Casa do Pombo - versão 2). *Se* f *é uma função de um conjunto finito* X *em um conjunto finito* Y *e* $|X| > |Y|$, *então existem* x_1, $x_2 \in X$, *com* $x_1 \neq x_2$, *tais que*

$$f(x_1) = f(x_2).$$

Demonstração. Usemos a terminologia da primeira versão do Princípio da Casa do Pombo. Identifiquemos X com o conjunto de pombos e Y com o conjunto de casas e associemos um pombo x a uma casa $f(x)$. Pela primeira versão do Princípio da Casa do Pombo, pelo menos dois pombos x_1, $x_2 \in X$ estão associados à mesma casa. Portanto existem x_1, $x_2 \in X$, com $x_1 \neq x_2$, tais que $f(x_1) = f(x_2)$. □

Exemplo 1.36. *Mostre que, se selecionarmos* 151 *cursos distintos de Ciência da Computação numerados entre* 1 *e* 300, *então pelo menos dois deles estarão numerados consecutivamente.*

Sejam

$$a_1, a_2, \ldots, a_{151} \tag{1.4}$$

os cursos selecionados e consideremos os números

$$a_1 + 1, a_2 + 1, \ldots, a_{151} + 1. \tag{1.5}$$

Então os 302 *números em* (1.4) *e* (1.5) *assumem valores entre* 1 *e* 301. *Com a notação da segunda versão do Princípio da Casa do Pombo, temos* $|X| = 302$ *e* $|Y| = 301$ *e, portanto, pelo menos dois valores entre* 1 *e* 301 *coincidem. Mas os números de* (1.4) *são distintos e o mesmo acontece para os números de* (1.5). *Logo pelo menos um número de* (1.4) *e um número de* (1.5) *coincidem, ou seja, existem* i, $j \in \{1, 2, \ldots, 151\}$ *tais que*

$$a_i = a_j + 1$$

e, portanto,

$$a_i - a_j = 1.$$

Notação. Dado um número $x \in \mathbb{R}$, denotamos por $[x]$ o "*o maior inteiro contido*" em x, isto é, $[x] = \max\{y \in \mathbb{Z};\, y \leq x\}$. Por exemplo:

- $x = 2,714 \Rightarrow [x] = 2$;
- $x = \dfrac{4}{3} \Rightarrow [x] = 1$;

- $x = -2,714 \Rightarrow [x] = -3$.

Teorema 1.37 (Princípio da Casa do Pombo - versão 3). *Seja f uma função de um conjunto finito X em um conjunto finito Y. Suponhamos que $|X| = n$, $|Y| = m$, com $n > m$. Seja $k = \left[\dfrac{n}{m}\right] + 1$. Então existem $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$ tais que*

$$f(x_1) = f(x_2) = \ldots = f(x_k).$$

Demonstração. Seja $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$. Suponhamos, por absurdo, que a afirmação é falsa, ou seja, que não existem $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$ tais que

$$f(x_1) = f(x_2) = \ldots = f(x_k) = y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Então existem no máximo $k-1$ valores para $x \in X$ tais que $f(x) = y_1$, existem no máximo $k-1$ valores para $x \in X$ tais que $f(x) = y_2$, ... e existem no máximo $k-1$ valores para $x \in X$ tais que $f(x) = y_m$. Logo o domínio de f tem no máximo

$$\overbrace{(k-1) + (k-1) + \ldots + (k-1)}^{m \text{ vezes}}$$

isto é,

$$|X| \leq m(k-1) < m\,\frac{n}{m} = n$$

o que é uma contradição. Portanto vale a afirmação do enunciado. □

Exemplo 1.38. *Uma característica interessante das fotografias em preto e brando é o brilho médio da foto. Digamos que duas fotos são do mesmo tipo se seu brilho médio difere por no máximo um certo valor dado. Mostre que, entre 6 fotos, ou três delas são mutuamente do mesmo tipo, ou existem três fotos que são mutuamente de tipos diferentes.*

Denotemos as fotos por F_1, F_2, ..., F_6. Sabemos que existem

$$C(6,2) = \frac{6!}{4!2!} = 15$$

combinações possíveis de pares de fotos. Então precisamos provar que existem i, j e k em $\{1,2,3,4,5,6\}$ distintos entre si tais que cada um dos pares

$$(P_i, P_j),\ (P_j, P_k) \text{ e } (P_i, P_k)$$

sejam do mesmo tipo.

Fixemos uma das fotos, por exemplo P_1, e consideremos os pares

$$(P_1, P_2),\ (P_1, P_3),\ (P_1, P_4),\ (P_1, P_5) \text{ e } (P_1, P_6).$$

Cada um destes pares assume valores "mesmo tipo" ou "tipo diferente". Então, na notação da terceira versão do Princípio da Casa do Pombo, temos $k = \left[\dfrac{5}{2}\right] + 1 = 2 + 1 = 3$ e, portanto, existem i, j, $k \in \{2,3,4,5,6\}$ distintos tais que

$$(P_1, P_i),\ (P_1, P_j) \text{ e } (P_1, P_k) \tag{1.6}$$

são todos do mesmo tipo ou todos de tipos diferentes.

Suponhamos que os pares em (1.6) *sejam do mesmo tipo. O caso em que os pares em* (1.6) *são de tipos diferentes fica como exercício. Se um dos pares seguintes*

$$(P_i, P_j),\ (P_i, P_k) \text{ ou } (P_j, P_k) \tag{1.7}$$

for do mesmo tipo, então as duas fotos deste par e a foto P_1 *são do mesmo tipo por* (1.6). *Caso contrário, as fotos* P_i, P_j *e* P_k *são mutuamente de tipos diferentes por* (1.7).

Capítulo 2

Funções geradoras

1 Introdução

Consideremos três objetos a, b e c. Então

- Existem três modos de selecionarmos um destes objetos. Representamos estes modos por
$$a + b + c.$$
- Existem três modos de selecionarmos dois objetos. Representamos estes modos por
$$ab + ac + bc.$$
- Existe um modo, que representamos por
$$abc,$$
de selecionarmos três objetos.
- Existe um modo de não selecionarmos qualquer objeto.

E podemos representar todas as possibilidades de seleção acima através do polinômio em x:

$$1 + (a + b + c)x + (ab + ac + bc)x^2 + (abc)x^3 = (1 + ax)(1 + bx)(1 + cx).$$

As possibilidades ou modos de selecionarmos os objetos a, b e c são representadas pelos coeficientes do polinômio. A letra x é um mero "*indicador*": o coeficiente de x^0 mostra as possibilidades de selecionarmos nenhum objeto, o coeficiente de x^1 mostra as possibilidades de selecionarmos um objeto e assim por diante até o coeficiente abc de x^3 que mostra a possibilidade de selecionarmos três objetos.

Outras "*interpretações*" equivalentes podem ser dadas para os fatores $(1 + ax)$, $(1 + bx)$ e $(1 + cx)$. Assim, por exemplo, o fator $(1 + ax)$ significa, simbolicamente, que os modos de selecionarmos o objeto a são: "*não selecionar a*" e "*selecionar a*". Portanto $(1 + ax)(1 + bx)(1 + cx)$ significa que os modos de selecionarmos os objetos a, b e c são: "*selecionar ou não selecionar a*" e "*selecionar ou não selecionar b*" e "*selecionar ou não selecionar c*".

O exemplo que acabamos de dar motiva a definição do que chamamos função geradora de uma seqüência.

Definição 2.1. *Seja* $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_r, \ldots)$ *a representação simbólica de uma seqüência de eventos ou números. Qualquer função do tipo*

$$F(x) = a_0\mu_0(x) + a_1\mu_1(x) + a_2\mu_2(x) + \ldots + a_r\mu_r(x) + \ldots$$

é chamada ***função geradora*** *da seqüência* $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_r, \ldots)$*, onde*

$$\mu_0(x),\ \mu_1(x),\ \mu_2(x),\ \ldots,\ \mu_r(x),\ \ldots$$

é uma seqüência de funções de x*, chamadas* ***funções indicadoras*** *pois são usadas como indicadores.*

Exemplo 2.2. *A função geradora da seqüência* $(1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^r, \ldots)$ *com funções indicadoras* $1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \ldots,\ \cos rx,\ \ldots$ *é dada por*

$$F(x) = 1 + \omega\cos x + \omega^2\cos 2x + \ldots + \omega^r\cos rx + \ldots.$$

Observação 2.3. *As funções indicadoras da Definição 2.1 devem ser escolhidas de tal forma que as funções geradoras de duas seqüências distintas não sejam iguais. Assim, por exemplo, consideremos as funções indicadoras*

$$1,\ 1+x,\ 1-x,\ 1+x^2,\ 1-x^2,\ \ldots,\ 1+x^r,\ 1-x^r,\ \ldots. \tag{2.1}$$

Então a função geradora da seqüência $(3, 2, 6, 0, 0)$ *é*

$$F(x) = 3 + 2(1+x) + 6(1-x) + 0(1+x^2) + 0(1-x^2) = 11 - 4x. \tag{2.2}$$

Entretanto as seqüências $(1, 3, 7, 0, 0)$ *e* $(1, 2, 6, 1, 1)$ *também originam a mesma função geradora de* (2.2) *(verifique!). Portanto as funções em* (2.1) *não devem ser usadas como funções indicadoras.*

Neste capítulo, vamos nos restringir à forma usual para $\mu_r(x)$. Usamos $\mu_r(x) = x^r$. Para este caso, temos a definição seguinte.

Definição 2.4. *A função*

$$F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_rx^r + \ldots$$

é chamada ***função geradora ordinária*** *da seqüência* $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_r, \ldots)$.

2 Funções geradoras para combinações

No início deste capítulo, vimos que o polinômio $(1 + ax)(1 + bx)(1 + cx)$ é a função geradora ordinária dos diferentes <u>modos</u> ou <u>possibilidades</u> de selecionarmos os objetos a, b e c. Nos interessa, entretanto, o <u>**número de modos**</u> de selecionarmos os objetos. Assim, consideramos $a = b = c = 1$ e temos

$$(1+x)(1+x)(1+x) = (1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 =$$

$$= C(3,0)x + C(3,1)x + C(3,2)x^2 + C(3,3)x^3, \tag{2.3}$$

ou seja

$$(1+x)^3 = \sum_{r=0}^{3} C(3,r)x^r. \tag{2.4}$$

Definição 2.5. *Uma função geradora ordinária que determina o número de combinações ou de permutações é chamada* ***enumerador ordinário*** *ou simplesmente* ***enumerador****.*

Generalizando as igualdades (2.3) e (2.4) acima, podemos obter o número de r-combinações de n objetos distintos para cada $r \leq n$, que é dado pela função geradora ordinária ou enumerador do Teorema Binomial a seguir.

Teorema 2.6 (Teorema Binomial - versão 1). *Sejam n um inteiro positivo e c um real qualquer. Então*

$$(1+x)^n =$$

$$= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-r-1)}{r!}x^r + \ldots + x^n = \tag{2.5}$$

$$= C(n,0) + C(n,1)x + C(n,2)x^2 + \ldots + C(n,r)x^r + \ldots + C(n,n)x^n \tag{2.6}$$

ou seja,

$$\boxed{(1+cx)^n = \sum_{r=0}^{n} C(n,r)(cx)^r.} \tag{2.7}$$

Observação 2.7. *É importante notarmos que*

- *na expansão de $(1+x)^n$ em (2.6), o coeficiente do termo x^r representa o número de vezes que o termo x^r pode ser formado tomando-se r x's e $n-r$ $1'$s entre os n fatores $1+x$;*
- *a notação $\binom{n}{r}$ também pode ser usada em lugar $C(n,r)$; assim podemos escrever (2.7) como*

$$\boxed{(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r} \tag{2.8}$$

Exemplo 2.8. *Tomando-se $x = -1$ em (2.8) temos*

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^r\binom{n}{r} + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$$

ou seja,

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots,$$

o que significa que o número de modos de selecionarmos um número par de objetos é igual ao número de modos de selecionarmos um número ímpar de objetos entre n objetos distintos.

Exemplo 2.9. *Qual é o coeficiente do termo x^{23} em $(1 + x^5 + x^9)^{100}$?*

O único modo de escrevermos o termo x^{23} a partir da expansão de $(1 + x^5 + x^9)^{100}$ é $x^{23} = x^5x^9x^9$. Além disso, existem $C(100, 2)$ modos de escolhermos os dois fatores x^9 e depois existem $C(98, 1)$ modos de escolhermos o fator x^5. Então o coeficiente de x^{23} é

$$C(100, 2) \times C(98, 1) = \frac{100 \cdot 99}{2} \cdot 98 = 485.100.$$

Agora vamos considerar $(1 + x)^n$, onde n não é um inteiro positivo, mas um número real qualquer. Neste caso, apresentamos a seguinte versão do Teorema Binomial sem prova.

Teorema 2.10 (Teorema Binomial - versão 2). *Sejam n e c números reais quaisquer. Então*

$$\boxed{(1 + cx)^n = 1 + \sum_{r=1}^{k} \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)}{r!}(cx)^r,} \tag{2.9}$$

onde $k = n$, se n é um inteiro positivo, e $k = \infty$ caso contrário.

O exemplo a seguir mostra como usar o Teorema Binomial para determinarmos uma função geradora.

Exemplo 2.11. *Mostre que $(1 - 4x)^{-\frac{1}{2}}$ é a função geradora ordinária da seqüência*

$$\binom{0}{0}, \binom{2}{1}, \binom{4}{2}, \binom{6}{3}, \ldots, \binom{2r}{r}, \ldots.$$

De acordo com a equação (2.9) da segunda versão do Teorema Binomial (Teorema 2.10), temos

$$(1 - 4x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - 1\right)\left(-\frac{1}{2} - 2\right)\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{1}{2} - r + 1\right)}{r!}(-4x)^r =$$

$$= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{4^r\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left[\frac{(2r-1)}{2}\right]}{r!}x^r =$$

$$= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2^r\left[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2r-1)\right]}{r!}x^r =$$

$$= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(2^r \cdot r!)\left[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2r-1)\right]}{r!r!}x^r =$$

$$= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2r)\left[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2r-1)\right]}{r!r!}x^r =$$

$$= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(2r)!}{r!r!}x^r = 1 + \sum_{r=1}^{\infty}\binom{2r}{r}x^r.$$

Como aplicação do Exemplo 2.11 temos o exemplo seguinte.

Exemplo 2.12. *Dado um número inteiro t, calcule*

$$\sum_{i=1}^{t}\binom{2i}{i}\binom{2t-2i}{t-i}.$$

Pelo Exemplo 2.11, $\binom{2i}{i}$ *é o coeficiente do termo* x^i *e* $\binom{2t-2i}{t-i}$ *é o coeficiente de* x^{t-i} *no desenvolvimento de* $(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$*, então*

$$\sum_{i=1}^{t}\binom{2i}{i}\binom{2t-2i}{t-i}$$

e o coeficiente do termo x^t*,* $t \neq 0$ *na expansão de* $(1-4x)^{-\frac{1}{2}}(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$*. Mas, pelo Teorema Binomial (Teorema 2.10), pode-se mostrar que*

$$\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \textit{se } x \in \,]-1,1[. \qquad \textit{(verifique!)}$$

Logo,

$$\begin{aligned}(1-4x)^{-\frac{1}{2}}(1-4x)^{-\frac{1}{2}} &= (1-4x)^{-1} = \\ = 1 + 4x + (4x)^2 + (4x)^3 + \ldots + (4x)^t + \ldots &= \\ = 1 + 4x + 4^2x^2 + 4^3x^3 + \ldots + 4^tx^t + \ldots &.\end{aligned}$$

Portanto

$$\sum_{i=1}^{t}\binom{2i}{i}\binom{2t-2i}{t-i} = 4^t.$$

Observação 2.13. *Quando são permitidas repetições, ou seja, quando um ou mais objetos são do mesmo tipo, então a idéia de enumerador de combinações também pode ser usada . Indicamos [2], p. 30-33, para o leitor interessado.*

3 Enumeradores para permutações

Devido à propriedade de comutatividade do corpo dos números reais (i.e., $ab = ba$ para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$), a extensão dos resultados anteriores não é tão simples para o caso das permutações pois, neste caso, a ordem não pode ser distinguida. Consideremos, por exemplo, as permutações que podemos fazer com dois objetos a e b. A função geradora ordenada que procuramos para estas permutações é

$$1 + (a+b)x + (ab+ba)x^2$$

que é igual a

$$1 + (a+b)x + (2ab)x^2$$

e, portanto, as duas permutações ab e ba não podem mais ser reconhecidas. Assim, em lugar de considerarmos a álgebra não-comutativa para estes casos, vamos nos restringir à discussão de enumeradores para as permutações. Neste caso, a álgebra (comutativa) do corpo dos reais é suficiente.

Uma extensão direta da noção de enumeradores para combinações indica que um enumerador para permutações de n objetos distintos seria da forma

$$F(x) = P(n,0)x^0 + P(n,1)x + P(n,2)x^2 + \ldots + P(n,r)x^r + \ldots + P(n,n)x^n.$$

Mas não existe uma tal expressão para $F(x)$ para permutações. Entretanto, pela expansão binomial (Teorema (2.6)), temos

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= 1 + C(n,1)x + C(n,2)x^2 + \ldots + C(n,r)x^r + \ldots + C(n,n)x^n = \\ &= 1 + \frac{P(n,1)}{1!}\,x + \frac{P(n,2)}{2!}\,x^2 + \ldots + \frac{P(n,r)}{r!}\,x^r + \ldots + \frac{P(n,n)}{n!}\,x^n. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Isto nos motiva a darmos a definição seguinte.

Definição 2.14. *Seja* $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_r, \ldots)$ *a representação simbólica de uma seqüência de eventos ou números. A função*

$$F(x) = \frac{a_0}{0!}\,\mu_0(x) + \frac{a_1}{1!}\,\mu_1(x) + \frac{a_2}{2!}\,\mu_2(x) + \ldots + \frac{a_r}{r!}\,\mu_r(x) + \ldots$$

é chamada ***função geradora exponencial*** *da seqüência* $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_r, \ldots)$*, onde*

$$\mu_0(x),\ \mu_1(x),\ \mu_2(x),\ \ldots, \mu_r(x),\ \ldots$$

são ***funções indicadoras****.*

Definição 2.15. *Chamamos* ***enumerador exponencial*** *(ou simplesmente* **enumerador** *quando não houver possibilidade de confusão) a função geradora exponencial que determina o número de permutações.*

Segue das Definição 2.14 e 2.15 e de (2.10) que $(1+x)^n$ é a função geradora exponencial dos $P(n,r)'s$ com as potências de x como funções indicadoras ou também que $(1+x)^n$ é o enumerador exponencial para permutações de n objetos distintos. Em particular, o enumerador exponencial para permutações de um único objeto sem repetições é $1+x$ indicando que podemos permutar nenhum objeto uma vez (coeficiente de x^0) e podemos permutar um objeto uma vez (coeficiente de x^1).

Exemplo 2.16. *Pelo Exemplo 2.12, temos que*

$$(1-4x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(2r)!}{r!r!}\,x^r = P(0,0) + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{P(2r,r)}{r!}\,x^r = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{P(2r,r)}{r!}\,x^r.$$

Portanto $(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$ *é a função geradora exponencial da seqüência*

$$(P(0,0), P(2,1), P(4,2), \ldots, P(2r,r), \ldots).$$

Também podemos estender o conceito de enumeradores exponenciais para o caso onde são permitidas repetições. Basta considerarmos permutações de objetos idênticos. Assim, o enumerador exponencial para permutações de *todos* os p objetos entre p objetos idênticos é $\frac{x^p}{p!}$. Então o enumerador exponencial para permutações de 0, 1, 2, ..., p objetos entre p objetos idênticos é dado por

$$1 + \frac{1}{1!}\,x + \frac{1}{2!}\,x^2 + \ldots + \frac{1}{p!}\,x^p. \tag{2.11}$$

Analogamente, o enumerador exponencial para permutações de *todos* os $p+q$ objetos entre $p+q$ objetos, onde p deles são do mesmo tipo e q deles são do mesmo tipo, é

$$\frac{x^p}{p!}\frac{x^q}{q!} = \frac{x^{p+q}}{p!q!},$$

o que está de acordo com o número de permutações destes objetos que é $\frac{(p+q)!}{p!q!}$ (veja o Teorema 1.10). Logo o enumerador exponencial para permutações de 0, 1, 2, ..., $p+q$ dos $p+q$ objetos, onde p deles são do mesmo tipo e q deles são do mesmo tipo, é

$$\left(1 + \frac{1}{1!}\,x + \frac{1}{2!}\,x^2 + \ldots + \frac{1}{p!}\,x^p\right)\left(1 + \frac{1}{1!}\,x + \frac{1}{2!}\,x^2 + \ldots + \frac{1}{q!}\,x^q\right).$$

Exemplo 2.17. *O enumerador exponencial para permutações de dois objetos de um mesmo tipo e de três objetos de outro tipo é*

$$\left(1 + \frac{1}{1!}\,x + \frac{1}{2!}\,x^2\right)\left(1 + \frac{1}{1!}\,x + \frac{1}{2!}\,x^2 + \frac{1}{3!}\,x^3\right) =$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{1!}\right)x + \left(\frac{1}{1!1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!}\right)x^2 + \left(\frac{1}{1!2!} + \frac{1}{1!2!} + \frac{1}{3!}\right)x^3 +$$

$$+ \left(\frac{1}{1!3!} + \frac{1}{2!2!}\right)x^4 + \left(\frac{1}{2!3!}\right)x^5.$$

Como considerarmos repetições é o mesmo que considerarmos objetos idênticos, então podemos generalizar (2.11) a fim de obtermos o número de r-permutações de r objetos distintos com inúmeras repetições. Este número é dado pelo enumerador exponencial

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right) = e^x = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!}\,x^r.$$

Segue que o número de r-permutações de n objetos distintos com inúmeras repetições é dado pelo enumerador exponencial

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)^n = (e^x)^n = e^{nx} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{n^r}{r!}\,x^r, \tag{2.12}$$

uma vez que podemos considerar r-permutações de r objetos distintos com inúmeras repetições, uma seguida da outra, n vezes, ou seja,

$$\overbrace{\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots\right)}^{n \text{ vezes}}$$

Exemplo 2.18. *Qual o número de seqüências quaternárias (i.e., seqüências formadas pelos algarismos* 0*,* 1*,* 2 *e* 3*) de* r *algarismos onde os algarismos* 1*,* 2 *e* 3 *aparecem pelo menos uma vez?*

O enumerador exponencial para permutações do algarismo 0 *é*

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots\right)=e^x.$$

Como, por hipótese, os algarismos 1*,* 2 *e* 3 *devem aparecer* <u>*pelo menos uma vez*</u>*, então o enumerador exponencial para permutações do algarismo* 1 *(ou* 2 *ou* 3*) é*

$$\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots\right)=e^x-1.$$

Portanto, o enumerador exponencial para permutações dos quatro algarismos 0*,* 1*,* 2 *e* 3 *é*

$$e^x(e^x-1)(e^x-1)(e^x-1)=e^x(e^x-1)^3=e^x(e^{3x}-3e^{2x}+3e^x-1)=$$

$$=e^{4x}-3e^{3x}+3e^{2x}-e^x=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(4^r-3\cdot 3^r+3\cdot 2^r-1)}{r!}\,x^r,$$

onde usamos (2.12) *para obtermos a última igualdade. Assim concluímos que o número de seqüências quaternárias de* r *algarismos onde cada um dos algarismos* 1*,* 2 *e* 3 *aparece pelo menos uma vez é*

$$4^r-3\cdot 3^r+3\cdot 2^r-1.$$

Exemplo 2.19. *Qual o número de seqüências quaternárias de* r *algarismos que contém um número par de* 0*'s?*

O enumerador exponencial para permutações de cada um dos algarismos 1*,* 2 *e* 3 *é*

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots\right)=e^x. \tag{2.13}$$

Como, por hipótese, devemos considerar um número par de 0*'s, então o enumerador exponencial para permutações do algarismo* 0 *é dado por*

$$\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots\right)=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)\qquad \textit{(verifique a igualdade!)}. \tag{2.14}$$

Assim, segue de (2.13) *e* (2.14) *que o enumerador exponencial para o número de seqüências quaternárias contendo um número par de* 0*'s é*

$$\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)e^xe^xe^x=\frac{1}{2}\left(e^{4x}+e^{2x}\right)=\frac{1}{2}\left(\sum_{r=0}^{\infty}\frac{4^r}{r!}\,x^r+\sum_{r=0}^{\infty}\frac{2^r}{r!}\,x^r\right)=1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{2}\,\frac{(4^r+2^r)}{r!}\,x^r,$$

onde usamos (2.12) *para obtermos a segunda igualdade. Portanto o número de seqüências quaternárias que contém um número par de* 0*'s, que é dado pelo coeficiente de* $\frac{x^r}{r!}$, *é*

$$\frac{4^r + 2^r}{2}.$$

Exemplo 2.20. *Qual é o número de seqüências quaternárias de* r *algarismos que contém um número par de* 0*'s e um número par de* 1*'s?*

O enumerador exponencial para permutações de seqüências quaternárias que contém um número par de 0*'s e um número par de* 1*'s (e qualquer número de* 2*'s e qualquer número de* 3*'s) é*

$$\frac{1}{2}\,(e^x + e^{-x})\frac{1}{2}\,(e^x + e^{-x})e^x e^x = \frac{1}{4}\,(e^{2x} + 2 + e^{-2x})e^{2x} =$$

$$= \frac{1}{4}\,(e^{4x} + 2e^{2x} + 1) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{4}\,\frac{(4^r + 2\cdot 2^r)}{r!}\,x^r \qquad (\textit{verifique!}).$$

Logo o número de seqüências quaternárias de r *algarismos que contém um número par de* 0*'s e um número par de* 1*'s é dado pelo coeficiente de* $\frac{x^r}{r!}$, *a saber*

$$\frac{4^r + 2\cdot 2^r}{4}.$$

Capítulo 3

Relações de recorrência

1 Introdução

As equações de recorrência são úteis em certos problemas de contagem. Como as equações de recorrência estão relacionadas com algoritmos recursivos, elas aparecem naturalmente na análise de tais algoritmos.

Consideremos as instruções:

1. Comece com 5.
2. Dado qualquer termo, adicione 3 ao termo seguinte.

Então obtemos a seguinte seqüência

$$5,\ 8,\ 11,\ 14,\ \ldots. \tag{3.1}$$

As instruções 1 e 2 acima dão uma fórmula explícita para o n-ésimo termo da seqüência em (3.1). De fato. Seja $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ a seqüência em (3.1). Reescrevendo as instruções 1 e 2 acima temos

1. $a_0 = 5$.
2. $\forall\, n \geq 1$, $a_n = a_{n-1} + 3$.

Definição 3.1. *Dada uma seqüência $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ de números, chama-se* ***relação de recorrência*** *a equação que relaciona qualquer número a_n da seqüência com um de seus predecessores.*

A fim de que uma relação de recorrência defina uma seqüência, são necessárias "*condições iniciais*".

Definição 3.2. ***Condições iniciais*** *para uma seqüência de números são valores explícitos dados a um número finito de termos da seqüência.*

Exemplo 3.3 (Seqüência de Fibonacci). *A seqüência de Fibonacci começa com dois números 1 e 1 e cada um dos seus termos seguintes é igual à soma dos seus dois predecessores imediatos. Portanto temos*

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \ldots.$$

Uma expressão para o termo geral desta seqüência é dada pela relação de recorrência

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geq 2,$$

com condições iniciais

$$a_0 = 1 \qquad a_1 = 1.$$

Exemplo 3.4. *Consideremos a série geométrica* $(1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots, 2^n, \ldots)$. *Então a relação de recorrência que descreve o n-ésimo termo desta seqüência é*

$$a_n = 2a_{n-1}$$

com condição inicial $a_0 = 1$. *Alternativamente, a seqüência pode ser descrita pela expressão*

$$a_n = 2^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

onde a_n *é chamado* ***termo geral*** *da seqüência.*

Definição 3.5. *Resolver uma relação de recorrência que define uma seqüência é encontrar uma fórmula explícita para se obter uma expressão para o termo geral da seqüência.*

Nosso interesse nas seções seguintes é resolver relações de recorrência. Vamos tratar somente de relações de recorrência lineares com coeficientes constantes. Entre os métodos de resolução de relações de recorrências que vamos estudar estão o método da iteração e o método das funções geradoras.

2 Método da iteração

Consideremos a seqüência $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$. Vamos usar uma relação de recorrência que descreve tal seqüência para escrevermos a_n em função de alguns de seus predecessores. A seguir, usamos a relação de recorrência novamente para escrevermos a_{n-1} em termos de alguns de seus predecessores e assim por diante até obtermos uma fórmula explícita para o termo a_n. Vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 3.6. *Uma pessoa investe* R\$ 1000,00 *a juros de* 12% *ao ano. Se* a_n *é o montante de dinheiro que esta pessoa terá ao final de n anos, encontre uma relação de recorrência e condições iniciais para definir a seqüência* (a_n). *Encontre uma fórmula para o termo geral* a_n.

Ao final de $n-1$ *anos, o montante será de* a_{n-1}. *E, depois de mais um ano, o montante será* a_n *que é dado por*

$$a_n = a_{n-1} + (0,12)a_{n-1} = (1,12)a_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

A partir da condição inicial $a_0 = 1000$, *podemos obter o valor de* a_n *para qualquer* n. *Assim, por exemplo,*

$$a_3 = (1,12)a_2 = (1,12)(1,12)a_1 = (1,12)(1,12)(1,12)a_0 =$$

$$= (1,12)^3 a_0 = (1,12)^3(1000) = 1404,93.$$

Então, ao final do terceiro ano, a pessoa terá R\$ 1404, 93. *Pelo Princípio de Indução Finita, podemos concluir que, ao final de n anos, a pessoa terá*

$$a_n = (1,12)^n(1000)$$

reais.

Exemplo 3.7. *Aplique o método da iteração para resolver a relação de recorrência*

$$a_n = a_{n-1} + 3 \tag{3.2}$$

sujeita à condição inicial

$$a_1 = 2.$$

Fazendo $n = n-1$ em (3.2) *temos*

$$a_{n-1} = a_{n-2} + 3. \tag{3.3}$$

Substituindo (3.3) *em* (3.2) *temos*

$$a_n = (a_{n-2} + 3) + 3 = a_{n-2} + 2 \cdot 3. \tag{3.4}$$

Fazendo $n = n-2$ em (3.2) *temos*

$$a_{n-2} = a_{n-3} + 3. \tag{3.5}$$

Daí, substituindo (3.5) *em* (3.4) *temos*

$$a_n = (a_{n-3} + 3) + 2 \cdot 3 = a_{n-3} + 3 \cdot 3.$$

Em geral, devemos ter

$$a_n = a_{n-j} + j \cdot 3,$$

fato este que pode ser provado pelo Princípio de Indução Finita. Em particular, quando $j = n-1$ temos

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot 3.$$

E, usando a condição inicial, obtemos

$$a_n = 2 + 3(n-1).$$

3 Relações de recorrência lineares com coeficientes constantes

Definição 3.8. *Uma relação de recorrência da forma*

$$C_0 a_n + C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \ldots + C_r a_{n-r} = f(n), \tag{3.6}$$

onde $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_r$ são constantes, é chamada ***relação de recorrência linear*** *com coeficientes constantes. Quando $f(n) = 0$, então* (3.6) *é chamada* ***relação de recorrência linear homogênea*** *com coeficientes constantes.*

Exemplo 3.9. *A relação de recorrência*

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

que define a seqüência de Fibonacci (veja Exemplo 3.3) é uma relação de recorrência linear homogênea com coeficientes constantes.

Exemplo 3.10. *A relação de recorrência*

$$3a_n - 5a_{n-1} + 2a_{n-2} = n^2 + 5$$

é uma relação de recorrência (não-homogênea) linear com coeficientes constantes.

Se conhecemos os valores de r a's consecutivos, por exemplo, $a_{k-r}, a_{k-r+1}, \ldots, a_{k-1}$ para algum k, então podemos calcular o valor de a_k a partir de (3.6). Além disso, os valores de $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots$ e de $a_{k-r-1}, a_{k-r-2}, \ldots$ podem ser calculados pelo método da iteração. Então a solução de (3.6) é determinada unicamente pelos valores de r a's consecutivos que são as condições iniciais.

Definição 3.11. *A **solução** ou **solução total** de uma relação de recorrência linear com coeficientes constantes é a soma da **solução homogênea**, que é a solução da relação de recorrência linear homogênea correspondente, com a **solução particular**, que é a solução da relação de recorrência (não-homogênea) linear.*

É imediato que se $a_n^{(h)}$ e $a_n^{(p)}$ são respectivamente a solução homogênea e a solução particular da relação de recorrência (3.6), então a solução total $a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$ satisfaz (3.6) (*verifique!!!*).

3.1 Relações de recorrência lineares homogêneas

Teorema 3.12. *A solução homogênea de uma relação de recorrência linear é da forma*

$$a_n^{(h)} = A\alpha_1^n,$$

*onde α_1 é dita **raiz característica** e A é uma constante determinada pelas condições iniciais.*

Demonstração. Consideremos a relação de recorrência linear

$$C_0 a_n + C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \ldots + C_r a_{n-r} = f(n)$$

e sua respectiva relação de recorrência linear homogênea

$$C_0 a_n + C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \ldots + C_r a_{n-r} = 0. \tag{3.7}$$

Substituindo $A\alpha^n$ por a_n em (3.7) temos

$$C_0 A\alpha^n + C_1 A\alpha^{n-1} + C_2 A\alpha^{n-2} + \ldots + C_r A\alpha^{n-r} = 0. \tag{3.8}$$

Se $A \neq 0$, então (3.8) é equivalente ao polinômio

$$C_0 \alpha^n + C_1 \alpha^{n-1} + C_2 \alpha^{n-2} + \ldots + C_r \alpha^{n-r} = 0$$

que é chamado **equação característica** de (3.7). Assim, se α_1 for uma raiz da equação característica, então $A\alpha_1^n$ será uma solução homogênea da relação de recorrência homogênea (3.7). □

Uma equação característica de grau r em $\mathbb{C}$ admite r raízes características. Consideremos, primeiramente, o caso em que as raízes características são distintas. Segue do Teorema 3.12 que

Teorema 3.13. *Se as raízes da equação característica de uma relação de recorrência homogênea*

$$C_0 a_n + C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \ldots + C_r a_{n-r} = 0$$

são distintas, então a solução homogênea é da forma

$$a_n^{(h)} = A_1 \alpha_1^n + A_2 \alpha_2^n + \ldots + A_r \alpha_r^n,$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ *são as raízes características distintas e* $A_1, A_2, \ldots, A_r$ *são constantes determinadas pelas condições iniciais.*

Exemplo 3.14 (Seqüência de Fibonacci). *A relação de recorrência para a seqüência de Fibonacci é*

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

(veja o Exemplo 3.3), ou seja

$$a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0,$$

cuja equação característica correspondente é dada por

$$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$$

com raízes

$$\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad e \qquad \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

A solução homogênea, que também é a solução total (por que?), é dada por

$$a_n = a_n^{(h)} = A_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + A_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \tag{3.9}$$

As duas constantes A_1 *e* A_2 *poder ser determinadas a partir das condições iniciais* $a_0 = 1$ *e* $a_1 = 1$*. De fato. Basta resolvermos o sistema*

$$\begin{cases} 1 = a_0 = A_1 + A_2 \\ 1 = a_1 = A_1 \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + A_2 \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

donde seque que

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad e \qquad A_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1-\sqrt{5}}{2}. \tag{3.10}$$

Daí, substituindo (3.10) *em* (3.9) *obtemos*

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}.$$

Se um polinômio a coeficientes reais tem uma raiz complexa $\delta + i\omega$, então o seu conjugado $\delta - i\omega$ também é uma raiz do polinômio (*verifique!!!*). Portanto, raízes complexas sempre aparecem em pares. Assim, como $\alpha_1 = \delta + i\omega$ e $\alpha_2 = \delta - i\omega$ formam um par de raízes características, então a solução homogênea correspondente é dada por

$$A_1(\alpha_1)^n + A_2(\alpha_2)^n = A_1(\delta + i\omega)^n + A_2(\delta - i\omega)^n = B_1\rho^n \cos n\theta + B_2\rho^n \operatorname{sen} n\theta,$$

onde $\rho = \sqrt{\delta^2 + \omega^2}$, $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{\omega}{\delta}\right)$, $B_1 = (A_1 + A_2)$ e $B_2 = i(A_1 - A_2)$.

Observação 3.15. *Note que B_1 e B_2 no parágrafo acima são determinadas pelas condições iniciais.*

Exemplo 3.16. *Calcule o determinante de ordem n*

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n \times n} . \tag{3.11}$$

Expandindo o determinante D de ordem n acima com respeito à primeira coluna obtemos

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} -$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} \tag{3.12}$$

Expandindo o segundo determinante de ordem $n-1$ no termo à direita de (3.12) *com respeito* *à primeira linha obtemos*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(n-2)\times(n-2)} . \tag{3.13}$$

Assim, se denotarmos por a_k o determinante de ordem k da forma (3.11)*, segue de* (3.11)*,* (3.12) *e* (3.13) *que*

$$a_n = a_{n-1} - a_{n-2},$$

ou seja,

$$a_n - a_{n-1} + a_{n-2} = 0. \tag{3.14}$$

A equação característica correspondente à relação de recorrência (3.14) *é*

$$\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$$

cujas raízes são

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad e \qquad \alpha_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Como

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1 \qquad e \qquad \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}/2}{1/2}\right) = \frac{\pi}{3},$$

então

$$a_n = B_1 \cos\frac{n\pi}{3} + B_2 sen\frac{n\pi}{3}, \tag{3.15}$$

uma vez que a solução total e a solução homogênea coincidem.

Pelas condições iniciais,

$$a_1 = 1 \qquad e \qquad a_2 = 1$$

obtemos

$$B_1 = 1 \qquad e \qquad B_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}. \tag{3.16}$$

E, substituindo (3.16) *em* (3.15)*, segue que a solução da relação de recorrência que determina o determinante D de ordem n é dada por*

$$a_n = \cos\frac{n\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} sen\frac{n\pi}{3}.$$

Consideremos, agora, o caso em que as raízes da equação característica são múltiplas.

Teorema 3.17. *Seja α_1 uma raíz de multiplicidade k da equação característica da relação de recorrência homogênea*

$$C_0a_n + C_1a_{n-1} + C_2a_{n-2} + \ldots + C_ra_{n-r} = 0. \tag{3.17}$$

Então a solução homogênea correspondente é da forma

$$a_n^{(h)} = (A_1n^{k-1} + A_2n^{k-2} + \ldots + A_{k-2}n^2 + A_{k-1}n + A_k)\alpha_1^n,$$

onde os A's são constantes determinadas pelas condições iniciais.

Demonstração. Pelo Teorema 3.12, sabemos que

$$a_n^{(h)} = A_k\alpha_1^n \tag{3.18}$$

é uma solução homogênea da relação de recorrência

$$C_0a_n + C_1A_{n-1} + C_2A_{n-2} + \ldots + C_ra_{n-r} = f(n), \tag{3.19}$$

isto é, (3.18) é uma solução da relação de recorrência homogênea (3.17). Vamos mostrar que

$$a_n^{(h)} = A_{k-1}n\alpha_1^n$$

também é uma solução homogênea de (3.19), ou seja, uma solução de (3.17).

Por hipótese, α_1 satisfaz a equação característica

$$C_0\alpha^n + C_1\alpha^{n-1} + C_2\alpha^{n-2} + \ldots + C_r\alpha^{n-r} = 0. \tag{3.20}$$

Além disso, como α_1 é uma raiz múltipla de (3.20), então α_1 também satisfaz a derivada de (3.20) que é dada por

$$C_0n\alpha^{n-1} + C_1(n-1)\alpha^{n-2} + C_2(n-2)\alpha^{n-2} + \ldots + C_r(n-r)\alpha^{n-r-1} = 0. \tag{3.21}$$

Multiplicando (3.21) por $A_{k-1}\alpha$ e colocando α_1 em lugar de α obtemos

$$C_0A_{k-1}n\alpha_1^n + C_1A_{k-1}(n-1)\alpha_1^{n-1} + C_2A_{k-1}(n-2)\alpha_1^{n-2} + \ldots + C_rA_{k-1}(n-r)\alpha_1^{n-r} = 0.$$

Portanto $A_{k-1}n\alpha_1^n$ é uma solução homogênea.

Como α_1 é uma raíz de multiplicidade k da equação característica (3.20), segue analogamente que α_1 também satisfaz as suas derivadas de ordem até $k-1$, donde podemos concluir que $A_{k-2}n^2\alpha_1^n$, $A_{k-3}n^3\alpha_1^n$, $\ldots$, $A_1n^{k-1}\alpha_1^n$ também são soluções homogêneas e temos a tese. □

Exemplo 3.18. *Resolva a relação de recorrência*

$$a_n + 6a_{n-1} + 12a_{n-2} + 8a_{n-3} = 0 \tag{3.22}$$

sujeita às seguintes condições iniciais

$$a_0 = 1, \qquad a_1 = -2 \qquad e \qquad a_2 = 8.$$

A equação característica é dada por

$$\alpha^3 + 6\alpha^2 + 12\alpha + 8 = 0. \tag{3.23}$$

Como -2 *é uma raíz (tripla) de* (3.23), *segue que a solução total de* (3.22) *é dada por*

$$a_n = (A_1 n^2 + A_2 n + A_3)(-2)^n$$

(veja o Teorema 3.17). Pelas condições iniciais, temos

$$A_1 = \frac{1}{2}, \qquad A_2 = -\frac{1}{2} \qquad e \qquad A_3 = 1.$$

Portanto,

$$a_n = \left(\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + 1\right)(-2)^n.$$

Exemplo 3.19. *Calcule o determinante de ordem* n

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}_{n\times n}. \tag{3.24}$$

Expandindo o determinante e denotando por a_k *o valor do determinante de ordem* k *com a mesma forma, obtemos a relação de recorrência*

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} \qquad (\textit{verifique!!!})$$

com raiz dupla 1. *Logo, pelo Teorema 3.17, a solução total é dada por*

$$a_n = (A_1 n + A_2)(1)^n = A_1 n + A_2.$$

Pelas condições iniciais $a_1 = 2$ *e* $a_2 = 3$, *segue que*

$$A_1 = 1 = A_2.$$

Portanto a solução total é

$$a_n = n + 1.$$

3.2 Relações de recorrência lineares não-homogêneas

Consideremos a relação de recorrência linear não homogênea

$$C_0 a_n + C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \ldots + C_r a_{n-r} = f(n).$$

Quando $f(n)$ é relativamente simples, podemos encontrar uma solução particular por "*inspeção*". Vejamos os exemplos a seguir.

Exemplo 3.20. *Consideremos a relação de recorrência*

$$a_n + 2a_{n-1} = n + 3 \tag{3.25}$$

com condição inicial

$$a_0 = 3.$$

A relação de recorrência homogênea correspondente a (3.25) *é*

$$a_n + 2a_{n-1} = 0 \tag{3.26}$$

e sua equação característica correspondente é

$$\alpha + 2 = 0$$

cuja raíz é

$$\alpha_1 = -2.$$

Portanto, de acordo com o Teorema 3.13, a solução de (3.26) *(solução homogênea de* (3.25)*) é*

$$a_n^{(h)} = A\alpha_1^n = A(-2)^n.$$

Para determinarmos uma solução particular, vamos "inspecionar" uma solução do tipo

$$a_n^{(p)} = Bn + D \tag{3.27}$$

assim como é a função $f(n)$ *em* (3.25)*. Substituindo* (3.27) *em* (3.25) *temos*

$$Bn + D + 2[B(n-1) + D] = n + 3,$$

ou seja,

$$3Bn + 3D - 2B = n + 3$$

e, comparando os termos em relação a n*, temos*

$$3B = 1 \qquad e \qquad 3D - 2B = 3,$$

ou seja,

$$B = \frac{1}{3} \qquad e \qquad D = \frac{11}{9}.$$

Logo a equação (3.27) *pode ser escrita como*

$$a_n^{(p)} = \frac{n}{3} + \frac{11}{9}.$$

Finalmente, a solução total de (3.25) *é dada por*

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = A(-2)^n + \frac{n}{3} + \frac{11}{9} \tag{3.28}$$

e aplicando a condição inicial em (3.28) *obtemos*

$$3 = a_0 = A + \frac{11}{9}$$

donde segue que $A = \dfrac{16}{9}$*. Portanto*

$$a_n = \frac{16}{9}(-2)^n + \frac{n}{3} + \frac{11}{9}.$$

Exemplo 3.21. *Consideremos a relação de recorrência*

$$a_n + 2a_{n-1} + a_{n-2} = 2^n. \tag{3.29}$$

A relação de recorrência homogênea correspondente é

$$a_n + 2a_{n-1} + a_{n-2} = 0$$

e sua equação característica é

$$\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0$$

com raíz dupla $\alpha_1 = -1$*. Portanto a solução homogênea é dada por*

$$a_n^{(h)} = (A_1 n + A_2)\alpha_1^n = (A_1 n + A_2)(-1)^n.$$

Para determinarmos a solução particular, vamos "inspecionar" uma solução do tipo

$$a_n^{(p)} = B2^n \tag{3.30}$$

assim como é a função $f(n)$ *em* (3.29)*. Substituindo* (3.30) *em* (3.29) *obtemos*

$$B2^n + 2B2^{n-1} + B2^{n-2} = 2^n$$

donde segue que $B = \dfrac{4}{9}$*. Logo*

$$a_n^{(p)} = \frac{4}{9}\,2^n = \frac{1}{9}\,2^{n+2}$$

e, portanto, a solução total de (3.29) *é*

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = (A_1 n + A_2)(-1)^n + \frac{1}{9}\,2^{n+2}.$$

4 Método das funções geradoras

Muitos problema físicos são descritos por relações de recorrência lineares da forma

$$C_0 a_n + C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \ldots + C_r a_{n-r} = f(n). \tag{3.31}$$

Na maioria dos casos, (3.31) tem sentido físico somente quando n é suficientemente grande, ou seja, quando $n \geq k$, onde k é um inteiro. Nestes tipos de problema, os valores para a_n, com $n \geq k - r$, são os únicos relacionados pela relação de recorrência e que têm significado físico; os outros valores a_{k-r}, a_{k-r+1}, ..., a_{k-1} são condições iniciais dadas pelo problema. Além disso, nos problemas em que a_n tem significado físico somente para $n \geq 0$, devemos ter $k \geq r$. Assim vamos considerar somente o caso em que a relação de recorrência (3.30) tem sentido para $n \geq k$, com $k \geq r$.

Como os valores de a_n para $n < k - r$ não estão limitados pela relação de recorrência, tais valores podem ser escolhidos arbitrariamente. Por exemplo, fixamos $a_n = 0$ se $n < 0$ e, quando $0 \leq n < k - r$, consideramos que a_n assume valores arbitrários. Então podemos encontrar a função geradora da seqüência $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ em lugar de procurarmos uma expressão geral para a_n.

Seja

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

a função geradora ordinária da seqüência $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$. Multiplicando a equação em (3.31) por x^n e somando para $n \geq k$ obtemos

$$\sum_{n=k}^{\infty} (C_0 a_n + C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \ldots + C_r a_{n-r})\, x^n = \sum_{n=k}^{\infty} f(n) x^n. \tag{3.32}$$

Mas temos

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} C_0 a_n x^n = C_0[A(x) - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - \ldots - a_{k-1} x^{k-1}] \\ \displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} C_1 a_{n-1} x^n = C_1 x[A(x) - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - \ldots - a_{k-2} x^{k-2}] \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} C_r a_{n-r} x^n = C_r x^r[A(x) - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - \ldots - a_{k-r-1} x^{k-r-1}]. \end{cases} \tag{3.33}$$

Assim, substituindo as equações de (3.33) em (3.32), podemos resolver uma equação em $A(x)$. Temos

$$\begin{aligned} A(x) &= a_0 + a_1 x + \ldots + a_{k-r-1} x^{k-r-1} + \\ &\quad + \frac{1}{C_0 + C_1 x + \ldots + C_r x^r} \left[\sum_{n=k}^{\infty} f(n) x^n + C_0(a_{k-r} x^{k-r} + \ldots + a_{k-1} x^{k-1}) + \right. \\ &\quad \left. + C_1(a_{k-r} x^{k-r-1} + \ldots + a_{k-2} x^{k-1}) + \ldots + C_{r-1} a_{k-r} x^{k-1} \right] \end{aligned}$$

Note que os valores de $a_0, a_1, \ldots a_{k-r-1}$, que foram tomados arbitrariamente, não afetam os valores de a_n para $n \geq k - r$. Para determinarmos $A(x)$, precisamos dos valores de $a_{k-r}, a_{k-r-1}, \ldots a_{k-1}$ que são as condições iniciais usadas para determinar os coeficientes na solução homogênea como na subseção 3.1.

Exemplo 3.22. *Consideremos n ovais desenhados no plano. Suponhamos que, um oval intercepta cada um dos outros ovais em dois pontos exatamente e nenhum outro oval intercepta estes mesmos pontos. Em quantas "regiões" estes ovais dividem o plano?*

Seja a_n o número de regiões em que o plano é dividido pelos n ovais. É claro que, se $n = 1$, então $a_n = 2$. Com auxílio de uma figura, podemos observar que, se $n = 2$, então $a_n = 4$; se $n = 3$, então $a_n = 8$; se $n = 4$, então $a_n = 14$. Para $n > 4$ o desenho de ovais fica mais complicado. Além disso, a expressão geral para a_n não é obvia.

Suponhamos que foram desenhados $n-1$ ovais e que estes ovais dividem o plano em a_{n-1} regiões. Então o n-ésimo oval vai interceptar os $n-1$ ovais anteriores em $2(n-1)$ pontos, ou seja, o n-ésimo oval será dividido em $2(n-1)$ arcos. Como cada um destes arcos vai dividir uma das a_{n-1} regiões em dois, temos a seguinte relação de recorrência

$$a_n = a_{n-1} + 2(n-1). \tag{3.34}$$

Com a relação (3.34) e a condição inicial $a_1 = 2$, podemos calcular o valor de a_n se aplicarmos a relação de recorrência repetidas vezes. Assim, por exemplo,

$$a_5 = a_4 + 2(5-1) = 14 + 8 = 22;$$

$$a_6 = a_5 + 2(6-1) = 22 + 10 = 32.$$

A seguir, vamos aplicar o método das funções geradoras para resolvermos a relação de recorrência (3.34) e encontrarmos uma expressão geral para a_n.

Como a_i só tem significado físico para $i \geq 1$, então (3.34) é válida somente para $n \geq 2$. Como a_0 não tem significado físico, podemos escolher um valor arbitrário para a_0. Um modo de fazermos isto é escolhermos a_0 tal que a validade de (3.34) pode ser estendida. Assim, por exemplo, tomando $a_0 = 2 = a_1$ segue que (3.34) vale $n \geq 1$.

Multiplicando a relação em (3.34) por x^n e somando ambos os lados da igualdade de $n = 1$ até $n = \infty$, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n + 2\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)x^n. \tag{3.35}$$

Mas $A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. Portanto (3.35) pode ser reescrita como

$$A(x) - a_0 = xA(x) + \frac{2x^2}{(1-x)^2}.$$

Logo

$$A(x)(1-x) = a_0 + \frac{2x^2}{(1-x)^2},$$

ou seja,

$$A(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{2}{1-x}.$$

De acordo com o Teorema Binomial (Teorema 2.10),

$$\frac{1}{(1-x)^3} = (1-x)^{-3} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{-3(-3-1)(-3-2)\cdot\ldots\cdot(-3-r+1)}{r!}(-1)^r x^r =$$

$$= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{3(3+1)(3+2)\cdot\ldots\cdot(3+r-1)}{r!} x^r = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3+r-1)}{r!} x^r. \tag{3.36}$$

Portanto o coeficiente do termo x^{n-2} *em* $\dfrac{1}{(1-x)^3}$ *é*

$$\frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot[3+(n-2)-1]}{(n-2)!}=\frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot n}{(n-2)!}=\frac{1}{2}\,n(n-1).$$

Então o coeficiente do termo x^{n-2} *em* $\dfrac{2}{(1-x)^3}$ *é igual a*

$$n(n-1).$$

Multiplicando $\dfrac{1}{(1-x)^3}$ *por* $2x^2$ *obtemos* $\dfrac{2x^2}{(1-x)^3}$ *e, portanto, podemos observar que o coeficiente do termo* x^n *em* $\dfrac{2x^2}{(1-x)^3}$ *é igual ao coeficiente do termo* x^{n-2} *em* $\dfrac{2}{(1-x)^3}$*, ou seja*

$$n(n-1).$$

Então podemos concluir que

$$\frac{2x^2}{(1-x)^3}$$

é a função geradora ordinária da seqüência

$$(0,\,0,\,2,\,6,\,\ldots,\,n(n-1),\,\ldots).$$

Analogamente segue do Teorema Binomial que

$$\frac{1}{1-x}=(1-x)^{-1}=1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{-1(-1-1)(-1-2)\cdot\ldots\cdot(-1-r+1)}{r!}\,(-1)^r x^r=$$

$$=1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1(1+1)(1+2)\cdot\ldots\cdot(1+r-1)}{r!}\,x^r=1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{r!}{r!}\,x^r=\sum_{r=0}^{\infty}x^r. \tag{3.37}$$

Portanto o coeficiente do termo x^n *em* $\dfrac{1}{1-x}$ *é igual a* 1*, donde segue que o coeficiente do termo* x^n *em* $\dfrac{2}{1-x}$ *é igual a* 2*.*

Finalmente, o coeficiente do termo x^n *em* $\dfrac{2x^2}{(1-x)^3}+\dfrac{2}{1-x}$ *é*

$$n(n-1)+2.$$

Logo,

$$a_n=n(n-1)+2.$$

Outra maneira de chegarmos ao valor de a_n *é escrevermos diretamente* $A(x)$ *na forma de um enumerador. Usando* (3.36) *e* (3.37)*, podemos escrever*

$$A(x)=\frac{2x^2}{(1-x)^3}+\frac{2}{1-x}=2x^2(1-x)^{-3}+2(1-x)^{-1}$$

como

$$\begin{aligned}
A(x) &= 2x^2\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3+n-1)}{n!}\,x^n\right]+2\sum_{n=0}^{\infty}x^n = \\
&= 2x^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3+n-1)}{n!}\,x^{n+2}+\sum_{n=0}^{\infty}2x^n = \\
&= 2x^2+\sum_{i=3}^{\infty}\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3+(i-2)-1)}{(i-2)!}\,x^i+\sum_{n=0}^{\infty}2x^n = \\
&= 2x^2+\sum_{i=3}^{\infty}\frac{i!}{(i-2)!}\,x^i+\sum_{n=0}^{\infty}2x^n = \\
&= 2x^2+\sum_{i=3}^{\infty}i(i-1)x^i+\sum_{n=0}^{\infty}2x^n = \\
&= 2x^2+\sum_{n=3}^{\infty}n(n-1)\,x^n+\left[1+x+\sum_{n=3}^{\infty}2x^n\right] = \\
&= 1+x+2x^2+\sum_{n=3}\left[n(n-1)+2\right]x^n,
\end{aligned}$$

donde segue que

$$a_n = n(n-1)+2, \qquad n\geq 3.$$

Observação 3.23. *Vamos tomar um outro valor para a_0 no Exemplo 3.22 para exemplificarmos o fato de que a escolha arbitrária de a_0 não altera o valor de a_n para $n\geq 1$.*

Seja $a_0 = 5$. Multiplicando a relação de recorrência (3.34) por x^n e somando os dois lados da igualdade de $n=2$ até $n=\infty$ obtemos

$$\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-1}x^n+2\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)x^n.$$

Portanto

$$A(x)-a_1x-a_0=x[A(x)-a_0]+\frac{2x^2}{(1-x)^2}.$$

Pela condição inicial $a_1=2$ e usando $a_0=5$, obtemos

$$A(x)-2x-5=x[A(x)-5]+\frac{2x^2}{(1-x)^2},$$

ou seja,

$$A(x)=\frac{2x^2}{(1-x)^3}+\frac{2x}{1-x}+5.$$

Então

$$a_n=\begin{cases}5, & n=0\\ n(n-1)+2, & n=1,2,3,\ldots\end{cases}$$

Capítulo 4

O Princípio de Inclusão e Exclusão

1 Introdução

Consideremos um grupo de 10 rapazes em que

- 6 rapazes torcem para o Palmeiras,
- 5 rapazes estão no segundo ano da faculdade,
- 3 rapazes torcem para o Palmeiras e estão no segundo ano da faculdade.

Quantos rapazes do grupo não torcem para o Palmeiras nem estão no segundo ano da faculdade? A resposta é

$$10 - 6 - 5 + 3.$$

De fato. Como 3 rapazes torcem para o Palmeiras e estão no segundo ano da faculdade, eles são subtraídos duas vezes em

$$10 - 6 - 5. \tag{4.1}$$

Logo, devemos somar 3 à expressão (4.1) para obtermos o número exato de rapazes que não torcem para o Palmeiras nem estão no segundo ano da faculdade. Tente representar este problema por um diagrama de Venn.

Quando queremos contar o número de certa classe de objetos, devemos excluir aqueles que não devem ser incluídos na contagem mas, ao mesmo tempo, devemos incluir aqueles que foram excluídos incorretamente. A generalização destes fatos nos leva a um teorema de contagem conhecido como *Princípio da Inclusão e Exclusão* que vamos estudar a seguir.

2 O Princípio da Inclusão e Exclusão

Consideremos um conjunto de N objetos e seja $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ um conjunto de propriedades destes objetos. Em geral, estas propriedades não são mutuamente exclusivas, ou seja, existem objetos que podem satisfazer uma ou mais propriedades. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, denotemos por $N(a_i)$ o número de objetos que satisfazem a propriedade a_i. Sendo assim, se um objeto satisfaz ambas as propriedades a_i e a_j, com $i \neq j$, então este objeto será contado tanto em $N(a_i)$ quanto em $N(a_j)$.

Para cada $i, j \in \{1, 2, \ldots, r\}$, $i \neq j$, sejam, também,

- $N(a_i')$ o número de objetos que *não* satisfazem a propriedade a_i,
- $N(a_i a_j)$ o número de objetos que satisfazem as propriedades a_i e a_j,
- $N(a_i' a_j')$ o número de objetos que *não* satisfazem qualquer das propriedades a_i e a_j,
- $N(a_i' a_j)$ o número de objetos que *não* satisfazem a propriedade a_i mas satisfazem a propriedade a_j,
- $N(a_i a_j')$ o número de objetos que satisfazem a propriedade a_i mas *não* satisfazem a propriedade a_j.

Obviamente

$$N(a_i') = N - N(a_i).$$

Além disso,

$$N(a_i' a_j) = N(a_j) - N(a_i a_j)$$

pois, para cada um dos $N(a_j)$ objetos que satisfaz a propriedade a_j, temos

- ou este objeto satisfaz a propriedade a_i e, portanto, é contado em $N(a_i a_j)$,
- ou este objeto *não* satisfaz a propriedade a_i e, portanto, é contado em $N(a_i' a_j)$.

Analogamente temos

$$N(a_i' a_j') = N - N(a_i a_j') - N(a_i' a_j) - N(a_i a_j)$$

que pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} N(a_i' a_j') &= N - [N(a_i a_j') + N(a_i a_j)] - [N(a_i' a_j) + N(a_i a_j)] + N(a_i a_j) = \\ &= N - N(a_i) - N(a_j) + N(a_i a_j) \end{aligned}$$

Generalizando a notação e considerações acima, apresentamos o Princípio da Inclusão e Exclusão.

Teorema 4.1 (Princípio da Inclusão e Exclusão). *Consideremos um conjunto de N objetos e seja $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ um conjunto de propriedades destes objetos. Então*

$$\begin{aligned} N(a_1' a_2' \ldots a_r') &= N - N(a_1) - N(a_2) - \ldots - N(a_r) + \\ &\quad + N(a_1 a_2) + N(a_1 a_3) + \ldots + N(a_{r-1} a_r) - \\ &\quad - N(a_1 a_2 a_3) - N(a_1 a_2 a_4) - \ldots - N(a_{r-2} a_{r-1} a_r) + \\ &\quad \vdots \\ &\quad + (-1)^r N(a_1 a_2 \ldots a_r) \end{aligned}$$

ou seja,

$$N(a_1' a_2' \ldots a_r') =$$

$$= N - \sum_i N(a_i) + \sum_{i,\, j;\, i \neq j} N(a_i a_j) - \sum_{i,\, j,\, k;\, i \neq j \neq k} N(a_i a_j a_k) + \ldots + (-1)^r N(a_1 a_2 \ldots a_r).$$

Demonstração. Vamos usar o Princípio de Indução Finita. Já vimos que

$$N(a_1') = N - N(a_1).$$

Como hipótese de indução, vamos supor que vale a tese para N objetos satisfazendo até $r-1$ propriedades $a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}$, ou seja, vale

$$\begin{aligned} N(a_1'a_2'\ldots a_k') &= N - N(a_1) - N(a_2) - \ldots - N(a_k) + \\ &+N(a_1a_2) + N(a_1a_3) + \ldots + N(a_{k-1}a_k) - \\ &-N(a_1a_2a_3) - N(a_1a_2a_4) - \ldots - N(a_{k-2}a_{k-1}a_k) + \\ &\vdots \\ &+(-1)^k N(a_1a_2\ldots a_k), \end{aligned}$$

para $k = 1, 2, \ldots, r-1$.

Agora, consideremos a propriedade a_r e o conjunto $N(a_r)$ dos objetos que satisfazem a propriedade a_r. Como este conjunto de objetos também pode satisfazer qualquer uma das propriedades $a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}$, usamos a hipótese indutiva várias vezes, para $k = 1, 2, \ldots, r-1$, para então concluirmos que

$$\begin{aligned} N(a_1'a_2'\ldots a_{r-1}'a_r) &= N(a_r) - N(a_1a_r) - N(a_2a_r) - \ldots - N(a_{r-1}a_r) + \\ &+N(a_1a_2a_r) + N(a_1a_3a_r) + \ldots + N(a_{r-2}a_{r-1}a_r) - \\ &-N(a_1a_2a_3a_r) - N(a_1a_2a_4a_r) - \ldots - N(a_{r-3}a_{r-2}a_{r-1}a_r) + \\ &\vdots \\ &+(-1)^{r-1} N(a_1a_2\ldots a_{r-1}a_r). \end{aligned}$$

Subtraindo esta última equação da hipótese indutiva para $k = r-1$ obtemos

$$\begin{aligned} &N(a_1'a_2'\ldots a_{r-1}') - N(a_1'a_2'\ldots a_{r-1}'a_r) = \\ &\quad = N - N(a_1) - N(a_2) - \ldots - N(a_r) + \\ &\quad +N(a_1a_2) + N(a_1a_3) + \ldots + N(a_{r-1}a_r) - \\ &\quad -N(a_1a_2a_3) - N(a_1a_2a_4) - \ldots - N(a_{r-2}a_{r-1}a_r) + \\ &\quad \vdots \\ &\quad +(-1)^r N(a_1a_2\ldots a_r). \end{aligned}$$

Mas

$$N(a_1'a_2'\ldots a_{r-1}') - N(a_1'a_2'\ldots a_{r-1}'a_r) = N(a_1'a_2'\ldots a_{r-1}'a_r')$$

e segue a tese. □

Exemplo 4.2. *Consideremos* 12 *bolas pintadas da seguinte maneira:*

- 2 *bolas estão pintadas de vermelho,*
- 1 *bola está pintada de azul,*

- 1 *bola está pintada de branco,*
- 2 *bolas estão pintadas de vermelho e azul,*
- 1 *bola está pintada de vermelho e branco,*
- 3 *bolas estão pintadas de vermelho, azul e branco.*

Quantas bolas não estão pintadas?

Sejam a_1, a_2 e a_3 as propriedades que uma bola possui de ter a cor vermelha, azul e branca respectivamente. Então temos

$$\begin{array}{lll} N(a_1) = 8 & N(a_2) = 6 & N(a_3) = 5 \\ N(a_1a_2) = 5 & N(a_1a_3) = 4 & N(a_2a_3) = 3 \\ N(a_1a_2a_3) = 3 & & \end{array}$$

Pelo Teorema 4.1,

$$N(a_1'a_2'a_3') = 12 - 8 - 6 - 5 + 5 + 4 + 3 - 3 = 2.$$

Portanto existem 2 *bolas que não estão pintadas.*

Exemplo 4.3. *Qual o número de inteiros entre* 1 *e* 250 *que não são divisíveis por* 2, 3, 5 *ou* 7*?*

Sejam a_1, a_2, a_3 e a_4 as propriedades que um número possui de ser divisível por 2, 3, 5 *e* 7 *respectivamente. Denotando por $[x]$ a função "maior inteiro contido" de um número x temos*

$$\begin{array}{ll} N(a_1) = \left[\dfrac{250}{2}\right] = 125 & N(a_2) = \left[\dfrac{250}{3}\right] = 83 \\ N(a_3) = \left[\dfrac{250}{5}\right] = 50 & N(a_4) = \left[\dfrac{250}{7}\right] = 35 \\ N(a_1a_2) = \left[\dfrac{250}{2\cdot 3}\right] = 41 & N(a_1a_3) = \left[\dfrac{250}{2\cdot 5}\right] = 25 \\ N(a_1a_4) = \left[\dfrac{250}{2\cdot 7}\right] = 17 & N(a_2a_3) = \left[\dfrac{250}{3\cdot 5}\right] = 16 \\ N(a_2a_4) = \left[\dfrac{250}{3\cdot 7}\right] = 11 & N(a_3a_4) = \left[\dfrac{250}{5\cdot 7}\right] = 7 \\ N(a_1a_2a_3) = \left[\dfrac{250}{2\cdot 3\cdot 5}\right] = 8 & N(a_1a_2a_4) = \left[\dfrac{250}{2\cdot 3\cdot 7}\right] = 5 \\ N(a_1a_3a_4) = \left[\dfrac{250}{2\cdot 5\cdot 7}\right] = 3 & N(a_2a_3a_4) = \left[\dfrac{250}{3\cdot 5\cdot 7}\right] = 2 \\ N(a_1a_2a_3a_4) = \left[\dfrac{250}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7}\right] = 1 & \end{array}$$

portanto o número de inteiros que não é divisível por 2, 3, 5 *ou* 7 *é dado por*

$$\begin{aligned} N(a_1'a_2'a_3'a_4') &= 250 - (125 + 83 + 50 + 35) + \\ &\quad + (41 + 25 + 17 + 16 + 11 + 7) - (8 + 5 + 3 + 2) + 1 = 57. \end{aligned}$$

Exemplo 4.4. *Com a notação do exemplo anterior e pela demonstração do Teorema 4.1, podemos concluir que existem*

$$\begin{aligned} N(a_1'a_3a_4') &= N(a_3) - N(a_1a_3) - N(a_3a_4) + N(a_1a_3a_4) = \\ &= 50 - 25 - 7 + 3 = 21 \end{aligned}$$

inteiros entre os números 1 *e* 250 *que não são divisíveis por* 2 *ou por* 7*, mas são divisíveis por* 5.

Exemplo 4.5. *Qual o número de seqüências quaternárias de r algarismos onde cada um dos números* 1*,* 2 *e* 3 *aparece pelo menos uma vez?*

Sejam a_1, a_2 e a_3 as propriedades que uma seqüência quaternária de r algarismos possui de não ter o número 1*, o número* 2*, e o número* 3 *respectivamente.*

O enumerador para permutações dos algarismos $0, 1, 2, 3$ que não possuem o número 1 *é igual ao enumerador para permutações dos algarismos $0, 2, 3$ que é dado por*

$$e^x e^x e^x = e^{3x} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{3^r}{r!} x^r.$$

Portanto existem 3^r seqüências quaternárias de r algarismos que não possuem o número 1*. Logo temos*

$$N(a_1) = 3^r.$$

Analogamente,

$$N(a_2) = 3^r \quad e \quad N(a_3) = 3^r.$$

Por outro lado, o enumerador para permutações dos algarismos $0, 1, 2, 3$ que não possuem os algarismos 1 *e* 2 *é igual ao enumerador para permutações dos algarismos* 0 *e* 3 *que é dado por*

$$e^x e^x = e^{2x} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{2^r}{r!} x^r.$$

Portanto existem 2^r seqüências quaternárias de r algarismos que não possuem o número 1 *e o número* 2*. Logo temos*

$$N(a_1a_2) = 2^r.$$

Analogamente,

$$N(a_1a_3) = 2^r \quad e \quad N(a_2a_3) = 2^r.$$

Além disso,

$$N(a_1a_2a_3) = 1 \qquad e \qquad N = 4^r.$$

Finalmente, usando o Princípio da Inclusão e Exclusão, podemos concluir que

$$\begin{aligned} N(a_1'a_2'a_3') &= N - [N(a_1) + N(a_2) - N(a_3)] + \\ &\quad + [N(a_1a_2) + N(a_1a_3) + N(a_2a_3)] - N(a_1a_2a_3) = \\ &= 4^r - 3 \cdot 3^r + 3 \cdot 2^r - 1 \end{aligned}$$

que é o número de seqüências quaternárias de r algarismos onde os números 1*,* 2 *e* 3 *aparecem pelo menos uma vez.*

Observação 4.6. *Compare a resolução do Exemplo 4.5 acima com o método de resolução do Exemplo 2.18.*

3 A fórmula geral

Consideremos um conjunto de N objetos e propriedades $a_1, a_2, \ldots, a_r$. Então o número de objetos que não satisfazem qualquer destas propriedades é $N(a'_1 a'_2 \ldots a'_r)$ dado pelo Teorema 4.1. Nesta seção, vamos deduzir uma fórmula que determine o número de objetos que satisfazem exatamente m das r propriedades, onde $m = 0, 1, 2, \ldots, r$.

Sejam

$$\begin{aligned}
s_0 &= N;\\
s_1 &= N(a_1) + N(a_2) + \ldots + N(a_r) = \sum_i N(a_1);\\
s_2 &= N(a_1a_2) + N(a_1a_3) + \ldots + N(a_{r-1}a_r) = \sum_{i,\,j;\,i\neq j} N(a_ia_j);\\
s_3 &= \sum_{i,\,j\,k;\,i\neq j\neq k} N(a_ia_ja_k);\\
&\vdots\\
s_r &= N(a_1a_2\ldots a_r).
\end{aligned}$$

Então s_i é o número de objetos que satisfazem i ou mais propriedades. Sejam, também,

$$\begin{aligned}
e_0 &= N(a'_1a'_2\ldots a'_r);\\
e_1 &= N(a_1a'_2a'_3\ldots a'_r) + N(a'_1a_2a'_3\ldots a'_r) + \ldots + N(a'_1a'_2a'_3\ldots a_r);\\
e_2 &= N(a_1a_2a'_3\ldots a'_r) + N(a_1a'_2a_3\ldots a'_r) + \ldots + N(a'_1a'_2a'_3\ldots a_{r-1}a_r);\\
e_3 &= N(a_1a_2a_3a'_4\ldots a'_r) + N(a_1a_2a'_3a_4\ldots a'_r) + \ldots + N(a'_1a'_2a'_3a'_4\ldots a_{r-2}a_{r-1}a_r);\\
&\vdots\\
e_r &= N(a_1a_2\ldots a_r).
\end{aligned}$$

Então e_i é o número de objetos que satisfazem *exatamente* i propriedades. Reescrevendo a fórmula do Teorema 4.1 com a notação acima obtemos

$$\boxed{e_0 = s_0 - s_1 + s_2 - \ldots + (-1)^r s_r.}$$

Mais geralmente temos o resultado seguinte.

Teorema 4.7. *Consideremos um conjunto de N objetos e propriedades $a_1, a_2, \ldots, a_r$. Então o número de objetos que satisfazem exatamente m destas propriedades, com $m = 0, 1, 2, \ldots, r$, é dado por*

$$\boxed{e_m = s_m - \binom{m+1}{1} s_{m+1} + \binom{m+2}{2} s_{m+2} - \ldots + (-1)^{r-m} \binom{r}{r-m} s_r.} \tag{4.2}$$

Demonstração. Primeiramente, notemos que um objeto que satisfaz menos do que m propriedades não deve ser contado em e_m, pois este objeto não contribui para a contagem no termos à direita da igualdade em (4.2). Por outro lado, um objeto que satisfaz exatamente m propriedades deve ser contado em e_m. Tal objeto contribui para a contagem de 1 no termo à direita da igualdade em (4.2), pois ele é contado em s_m e não é contado em s_{m+1}, s_{m+2}, $\ldots$, e s_r.

Um objeto que satisfaz $m + j$ propriedades, com $0 < j \leq r - m$, também não deve ser incluído na contagem de e_m. Mas este objeto contribui para a contagem de s_m, s_{m+1}, $\ldots$, s_{m+j} da seguinte forma:

com $\binom{m+j}{m}$ na contagem de s_m,

com $\binom{m+j}{m+1}$ na contagem de s_{m+1},

$\vdots$

e com $\binom{m+j}{m+j}$ na contagem de s_{m+j}.

Portanto, o número total de contribuições de um objeto que satisfaz $m + j$ propriedades no termo à direita de (4.2) é

$$\binom{m+j}{m} - \binom{m+1}{1}\binom{m+j}{m+1} + \binom{m+2}{2}\binom{m+j}{m+2} - \ldots + (-1)^j \binom{m+j}{j}\binom{m+j}{m+j}. \tag{4.3}$$

Mas

$$\binom{m+k}{k}\binom{m+j}{m+k} = \frac{(m+k)!}{m!k!} \frac{(m+j)!}{(m+k)!(j-k)!} = \frac{(m+j)!}{m!k!(j-k)!} =$$

$$= \frac{(m+j)!}{m!j!} \frac{j!}{k!(j-k)!} = \binom{m+j}{m}\binom{j}{k} \tag{4.4}$$

Logo, substituindo (4.4) em (4.3) obtemos

$$\binom{m+j}{m} \left[\binom{j}{0} - \binom{j}{1} + \binom{j}{2} - \ldots + (-1)^j \binom{j}{j} \right] = 0$$

que é o número de contribuições de um objeto que satisfaz $m + j$ propriedades para a contagem de e_m em (4.2). Assim concluímos que um objeto que satisfaz mais do que m propriedades não é contado em e_m e segue (4.2). $\square$

Exemplo 4.8. *Consideremos o problema do Exemplo 4.2. Então temos*

$$s_0 = 12;$$

$$s_1 = N(a_1) + N(a_2) + N(a_3) = 19;$$

$$s_2 = N(a_1a_2) + N(a_1a_3) + N(a_2a_3) = 12;$$

$$s_3 = N(a_1a_2a_3) = 3.$$

Portanto

$$e_0 = 12 - 19 + 12 - 3 = 2;$$

$$e_1 = 19 - \binom{2}{1}12 + \binom{3}{2}3 = 19 - 24 + 9 = 4;$$

$$e_2 = 12 - \binom{3}{1}3 = 12 - 9 = 3;$$

$$e_3 = s_3 = 3.$$

Agora, consideremos a seqüência $(e_0, e_1, e_2, \ldots, e_m, \ldots, e_r)$ e seja $E(x)$ sua função geradora ordinária. Então

$$E(x) = e_0 + e_1x + e_2x^2 + \ldots + e_mx^m + \ldots + e_rx^r. \tag{4.5}$$

Daí, substituindo (4.2) em (4.5) várias vezes obtemos

$$\begin{aligned} E(x) &= [s_0 - s_1 + s_2 - \ldots + (-1)^r s_r] + \\ &+ \left[s_1 - \binom{2}{1}s_2 + \binom{3}{2}s_3 - \ldots + (-1)^{r-1}\binom{r}{r-1}s_r\right]x + \\ &+ \left[s_2 - \binom{3}{1}s_3 + \binom{4}{2}s_4 - \ldots + (-1)^{r-2}\binom{r}{r-2}s_r\right]x^2 + \\ &\vdots \\ &+ \left[s_m - \binom{m+1}{1}s_{m+1} + \binom{m+2}{2}s_{m+2} - \ldots + (-1)^{r-2}\binom{r}{r-m}s_r\right]x^m + \\ &\vdots \\ &+ s_rx^r \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} E(x) &= s_0 + s_1(x-1) + s_2\left[x^2 - \binom{2}{1}x + 1\right] + s_3\left[x^3 - \binom{3}{1}x^2 + \binom{3}{2}x - 1\right] + \\ &\vdots \\ &+ s_m\left[x^m - \binom{m}{1}x^{m-1} + \binom{m}{2}x^{m-2} + \ldots + (-1)^{m-1}\binom{m}{m-1}x + (-1)^m\right] + \\ &\vdots \\ &+ s_r\left[x^r - \binom{r}{1}x^{r-1} + \binom{r}{2}x^{r-2} + \ldots + (-1)^r\right]. \end{aligned}$$

Finalmente, usando a igualdade

$$(x-1)^n = (-1)^n(1-x)^n = (-1)^n \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r$$

obtida pelo Teorema Binomial (Teorema 2.6), temos

$$E(x) = s_0 + s_1(x-1) + s_2(x-1)^2 + s_3(x-1)^3 + \ldots + s_r(x-1)^r = \sum_{j=0}^{r} s_j(x-1)^j. \quad (4.6)$$

Exemplo 4.9. *Fazendo* $x = 1$ *em* (4.5) *(ou em* (4.6)*) obtemos*

$$E(x) = e_0 + e_1 + e_2 + \ldots + e_r = s_0 = N,$$

o que significa que o número de objetos que não satisfazem qualquer propriedade somado ao número de objetos que satisfazem exatamente uma propriedade, e assim por diante até a soma com o número de objetos que satisfazem exatamente r *propriedades é igual ao número total de objetos,* N*.*

Notemos, também, que

$$\frac{1}{2}\left[E(1) + E(-1)\right] = e_0 + e_2 + e_4 + \ldots$$

e

$$\frac{1}{2}\left[E(1) - E(-1)\right] = e_1 + e_3 + e_5 + \ldots.$$

Por outro lado, usando a equação (4.6)*, temos*

$$\frac{1}{2}\left[E(1) + E(-1)\right] = \frac{1}{2}\left[s_0 + \sum_{j=0}^{r}(-2)^j s_j\right]$$

e

$$\frac{1}{2}\left[E(1) - E(-1)\right] = \frac{1}{2}\left[s_0 - \sum_{j=0}^{r}(-2)^j s_j\right].$$

Logo, temos

$$e_0 + e_2 + e_4 + \ldots = \frac{1}{2}\left[s_0 + \sum_{j=0}^{r}(-2)^j s_j\right],$$

que determina o número de objetos que satisfazem um número par de propriedades e

$$e_1 + e_3 + e_5 + \ldots = \frac{1}{2}\left[s_0 - \sum_{j=0}^{r}(-2)^j s_j\right],$$

que determina o número de objetos que satisfazem um número ímpar de propriedades.

Exemplo 4.10. *Qual o número de seqüências ternárias de* n *algarismos que possuem um número par de* 0*'s?*

Vamos resolver este problema de dois modos diferentes:

- 1^o ***modo:*** *pelo Princípio de Inclusão e Exclusão;*
- 2^o ***modo:*** *usando enumeradores exponenciais.*

1^o ***modo:***

Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, *seja* a_i *a propriedade que uma seqüência possui de que seu* i*-ésimo algarismo seja* 0. *Então temos*

$$N(a_i) = 3^{n-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n;$$

$$N(a_i a_j) = 3^{n-2}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n,\ i \neq j;$$

$$N(a_i a_j a_k) = 3^{n-3}, \quad i, j, k = 1, 2, \ldots, n,\ i \neq j \neq k;$$

$$\vdots$$

$$N(a_1 a_2 \ldots a_n) = 1$$

e, portanto,

$$s_1 = \binom{n}{1} 3^{n-1};$$

$$s_2 = \binom{n}{2} 3^{n-2};$$

$$s_3 = \binom{n}{3} 3^{n-3};$$

$$\vdots$$

$$s_n = \binom{n}{n} 3^{n-n}.$$

Como $s_0 = 3^n$, *segue que*

$$e_0 + e_2 + e_4 + \ldots = \frac{1}{2}\left[s_0 + \sum_{j=0}^{r}(-2)^j s_j\right] = \frac{1}{2}\left[3^n + \sum_{j=0}^{n}(-2)^j \binom{n}{j} 3^{n-j}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[3^n + (3-2)^n\right] = \frac{1}{2}(3^n + 1).$$

2^o ***modo:***

Sabemos que

- *o enumerador para permutações do algarismo* 0 *é*

$$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x});$$

- *o enumerador para permutações do algarismo* 1 *é*

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = e^x;$$

e, analogamente,

- *o enumerador para permutações do algarismo 2 é*

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = e^x.$$

Portanto o enumerador para permutações com um número par de 0's é

$$\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})e^x e^x = \frac{1}{2}(e^{3x} + e^x) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{3^r + 1}{r!}\, x^r,$$

donde segue que o número de seqüências ternárias de n algarismos que possuem um número par de 0's é

$$a_n = \frac{1}{2}(3^r + 1).$$

4 Desarranjos

Definição 4.11. *Consideremos os inteiros $1, 2, \ldots, n$. Qualquer permutação destes inteiros onde nenhum inteiro aparece em sua posição natural é chamada* ***desarranjo****.*

Exemplo 4.12. *Quando uma permutação de $1, 2, \ldots, n$ é tal que o inteiro 1 não aparece na primeira posição, o inteiro 2 não aparece na segunda posição, $\ldots$ e o inteiro n não aparece na n-ésima posição, temos um desarranjo.*

Definição 4.13. *Consideremos um conjunto de objetos. Se, para cada objeto, existe uma posição que ele não pode ocupar, ou seja, uma posição "*proibida*", e dois objetos não possuem a mesma posição proibida, então um* ***desarranjo*** *destes objetos é qualquer permutação onde nenhum dos objetos aparece na sua posição proibida.*

Nesta seção, vamos determinar o número de desarranjos de n objetos de duas maneiras:

- utilizando o Princípio de Inclusão e Exclusão e
- utilizando relações de recorrência.

Primeiramente vamos usar o Princípio de Inclusão e Exclusão para determinarmos o número de desarranjos de n objetos. Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, seja a_i a propriedade que uma permutação possui de que o i-ésimo objeto esteja colocado na sua posição proibida. Então temos

$$N(a_i) = (n-1)!, \quad i = 1, 2, \ldots, n;$$

$$N(a_i a_j) = (n-2)!, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n,\ i \neq j;$$

$$N(a_i a_j a_k) = (n-3)!, \quad i, j, k = 1, 2, \ldots, n,\ i \neq j \neq k;$$

$$\vdots$$

$$N(a_1 a_2 \ldots a_n) = 1$$

e, portanto,

$$s_0 = n!$$

$$s_1 = \binom{n}{1}(n-1)!$$

$$s_2 = \binom{n}{2}(n-2)!$$

$$s_3 = \binom{n}{3}(n-3)!$$

$$\vdots$$

$$s_n = \binom{n}{n}(n-n)!$$

Logo, pelo Princípio de Inclusão e Exclusão (Teorema 4.1), o número de desarranjos de n objetos, que denotamos por d_n, é dado por

$$\begin{aligned} d_n = N(a_1'a_2'\dots a_n') &= s_0 - s_1 + s_2 - \dots + (-1)^n s_n = \\ &= n!\left[1 - 1 + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right] \approx n!\, e^{-1}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Observação 4.14. *Mesmo para n relativamente pequeno, a expressão*

$$\boxed{d_n \approx n!\, e^{-1}}$$

é uma boa aproximação para d_n. Por exemplo, para $n = 6$, temos o valor exato

$$d_6 = 6!\left[1 - 1 + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^6 \frac{1}{6!}\right] = 0,36806$$

e o valor aproximado

$$d_6 \approx 6!\, e^{-1} = 0,36788.$$

Exemplo 4.15. *Dez senhoras deixam suas sacolas no porta-volumes de um supermercado. Depois as sacolas são devolvidas ao acaso. De quantas maneiras as sacolas podem ser devolvidas sendo que nenhuma senhora recebe sua própria sacola de volta?*

Fazendo $n = 10$ em (4.7) temos

$$d_{10} = 1.334.961 \approx 10!\, e^{-1}.$$

O número de desarranjos de inteiros também pode ser obtido através da resolução de uma relação de recorrência. Consideremos o desarranjo dos inteiros $1, 2, \dots, n$ onde a primeira posição é ocupara pelo inteiro k, $k \neq 1$. Sob estas hipóteses, consideremos as seguintes situações:

1. se o inteiro 1 ocupa a k-ésima posição, então existem d_{n-2} modos de desarranjarmos os $n-2$ inteiros $2, 3, \ldots, k-1, k+1, \ldots n$;
2. se o inteiro 1 *não* ocupa a k-ésima posição, então existem d_{n-1} modos de desarranjarmos os $n-1$ inteiros $1, 2, 3, \ldots, k-1, k+1, \ldots n$, pois podemos considerar que a k-ésima posição é proibida para o inteiro 1 (caso contrário, teríamos a situação 1.).

Como k foi tomado de forma que $k \neq 1$, então k pode ser qualquer dos inteiros $2, 3, \ldots, n$, ou seja, k pode assumir qualquer dos $n-1$ valores $2, 3, \ldots, n$. Logo, temos a seguinte relação de recorrência

$$d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2}) \tag{4.8}$$

que só tem significado físico para $n \geq 3$.

É claro que o número de desarranjos do inteiro 1 é

$$d_1 = 0$$

e o número de desarranjos dos inteiros 1 e 2 é

$$d_2 = 1$$

e estas são as condições iniciais para a relação de recorrência (4.8). Além disso, se considerarmos

$$d_0 = 1,$$

então podemos estender (4.8) para $n \geq 2$.

A relação de recorrência (4.8) pode ser reescrita como

$$d_n - nd_{n-1} = -\left[d_{n-1} - (n-1)d_{n-2}\right]. \tag{4.9}$$

Por outro lado, fazendo $n = n-1$ em (4.8) temos

$$d_{n-1} = (n-2)(d_{n-2} + d_{n-3}),$$

ou seja

$$d_{n-1} - (n-1)d_{n-2} = -d_{n-2} + (n-2)d_{n-3}. \tag{4.10}$$

Então, substituindo (4.10) em (4.9), obtemos

$$d_n - nd_{n-1} = -\left[-d_{n-2} + (n-2)d_{n-2}\right].$$

Repetindo este procedimento várias vezes obtemos

$$\begin{aligned} d_n - nd_{n-1} &= -\left[d_{n-1} - (n-1)d_{n-2}\right] = \\ &= -\left[-d_{n-2} + (n-2)d_{n-3}\right] = \\ &= -\left[d_{n-3} - (n-3)d_{n-4}\right] = \\ &\vdots \\ &= (-1)^{n-2}\left[d_2 - 2d_1\right] = \\ &= (-1)^{n-2} = \\ &= (-1)^n, \end{aligned}$$

ou seja,

$$d_n - nd_{n-1} = (-1)^n. \tag{4.11}$$

Para resolvermos a relação de recorrência (4.11), vamos usar o método das funções geradoras. Seja $D(x)$ a função geradora exponencial da seqüência $(d_0, d_1, d_2, \ldots, d_r, \ldots)$. Então

$$D(x) = d_0 + \frac{d_1}{1!}x + \frac{d_2}{2!}x^2 + \ldots + \frac{d_r}{r!}x^r + \ldots \tag{4.12}$$

Como estamos considerando permutações, devemos multiplicar a equação (4.11) por $\frac{x^n}{n!}$ (vale notarmos que, no caso de termos relações de recorrência que descrevam seleções, devemos multiplicar a relação de recorrência por x^n e não por $\frac{x^n}{n!}$, como mostram exemplos do capítulo anterior). A seguir, somamos de $n = 2$ até $n = \infty$ e obtemos

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{d_n}{n!}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{nd_{n-1}}{n!}x^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}x^n. \tag{4.13}$$

Substituindo (4.12) em (4.13) temos

$$D(x) - d_1x - d_0 - x\left[D(x) - d_0\right] = e^{-x} - (1-x).$$

Mas sabemos que $d_1 = 0$ e tomamos $d_0 = 1$ para que a relação de recorrência tenha sentido físico para $n \geq 2$. Logo

$$D(x) - 0 - 1 - xD(x) + x = e^{-x} - 1 + x,$$

ou seja

$$D(x) - xD(x) = e^{-x}$$

e, portanto,

$$D(x) = \frac{e^{-x}}{1-x} = e^{-x}(1-x)^{-1} = e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}\right]\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right).$$

Assim o coeficiente de x^n no enumerador exponencial $D(x)$ é

$$\boxed{d_n = n!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + (-1)^n\frac{1}{n!}\right].}$$

Exemplo 4.16. *Em uma biblioteca, n livros são distribuídos para n crianças. Depois de devolvidos, os livros são distribuídos novamente. De quantas maneiras isto pode ser feito sendo que nenhuma criança recebe o mesmo livro de novo?*

Na primeira vez, os livros podem ser distribuídos de

$$n!$$

modos diferentes. Na segunda vez, os livros podem ser distribuídos de

$$d_n = n!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + (-1)^n\frac{1}{n!}\right]$$

modos diferentes. Logo, o número total de modos de distribuirmos os livros é

$$(n!)^2\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right]\approx(n!)^2e^{-1}.$$

Exemplo 4.17. *De quantas maneiras os inteiros* $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ *podem ser permutados de modo que os inteiros ímpares não ocupem as suas posições naturais?*

Para cada $i=1,2,\ldots,9$, *consideremos* a_i *como sendo a propriedade que uma permutação dos inteiros* $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ *possui de que o i-ésimo inteiro esteja colocado na sua posição proibida que, neste caso, é a sua posição natural. Então temos*

$$\begin{aligned}
&N(a_i)=(9-1)!,\quad i=1,2,\ldots,9;\\
&N(a_ia_j)=(9-2)!,\quad i,j=1,2,\ldots,9,\ i\neq j;\\
&N(a_ia_ja_k)=(9-3)!,\quad i,j,k=1,2,\ldots,9,\ i\neq j\neq k;\\
&\vdots\\
&N(a_1a_2\ldots a_9)=1.
\end{aligned}$$

Mas somente nos interessa que os 5 *inteiros ímpares* $1,3,5,7,9$ *não ocupem as suas posições naturais. Portanto temos*

$$\begin{aligned}
&s_0=9!\\
&s_1=N(a_1)+N(a_3)+N(a_5)+N(a_7)+N(a_9)=\sum_{i\in A}N(a_i)=\binom{5}{1}(9-1)!=\binom{5}{1}8!\\
&s_2=\sum_{i,j\in A;\ i\neq j}N(a_ia_j)=\binom{5}{2}(9-2)!=\binom{5}{2}7!\\
&s_3=\sum_{i,j,k\in A;\ i\neq j\neq k}N(a_ia_ja_k)=\binom{5}{3}(9-3)=\binom{5}{3}6!\\
&s_4=\sum_{i,j,k,l\in A;\ i\neq j\neq k\neq l}N(a_ia_ja_ka_l)=\binom{5}{4}(9-4)=\binom{5}{4}5!\\
&s_5=N(a_1a_3a_5a_7a_9)=\binom{5}{5}(9-5)!=\binom{5}{5}4!
\end{aligned}$$

Logo, pelo Princípio de Inclusão e Exclusão (Teorema 4.1 - veja, também, a equação (4.7)), segue que o número de modos de permutarmos os inteiros $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ *de maneira que os inteiros ímpares não ocupem suas posições originais é*

$$9!-\binom{5}{1}8!-\binom{5}{2}7!-\binom{5}{3}6!-\binom{5}{4}5!-\binom{5}{5}4!=205.056.$$

Em geral temos que dado um conjunto de n objetos, o número de permutações em que um subconjunto de r objetos são desarranjados é dado por

$$\boxed{n! - \binom{r}{1}(n-1)! + \binom{r}{2}(n-2)! - \binom{r}{3}(n-3)! - \ldots + (-1)^r\binom{r}{r}(n-r)!}$$

Exemplo 4.18. *Consideremos os inteiros* $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ *novamente. De quantas maneiras estes inteiros podem ser permutados de modo que os inteiros ímpares não ocupem as suas posições naturais, mas todos os inteiros pares ocupem as suas posições naturais?*

Neste caso, os inteiros pares ficam "parados" enquanto que somente os inteiros ímpares são permutados. Assim consideramos $n = 5$ *(que é o número de inteiros ímpares,* $1, 3, 5, 7, 9$*) e aplicamos a equação* (4.7) *obtendo*

$$d_5 = N(a_1'a_3'a_5'a_7'a_9') = 5!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right] = 44,$$

onde usamos a mesma notação do Exemplo 4.17.

Exemplo 4.19. *Qual o número de modos de permutarmos os inteiros* $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ *de maneira que exatamente* 4 *inteiros quaisquer permaneçam em suas posições naturais?*

Basta considerarmos que exatamente 5 *inteiros quaisquer devem ser desarranjados. Assim temos*

$$C(9, 5) \cdot d_5 = 5.544.$$

Segue, portanto, que

Exemplo 4.20. *O número de modos de permutarmos os inteiros* $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ *de maneira que* 5 *ou mais inteiros estejam desarranjados é*

$$C(9, 5) \cdot d_5 + C(9, 6) \cdot d_6 + C(9, 7) \cdot d_7 + C(9, 8) \cdot d_8 + C(9, 9) \cdot d_9.$$

Capítulo 5

Teoria de contagem de Pólya

1 Introdução

Consideremos o problema de contarmos o número de tabuleiros de xadrez com 2×2 casas, isto é, com 4 casas dispostas em forma de um quadrado, sendo que cada casa pode ser de uma das cores preta ou branca. Com o auxílio de uma figura, podemos ver que há $2^4 = 16$ possibilidades de tabuleiros "diferentes". De fato, pois existem

- 1 tabuleiro com quatro casas brancas,
- 4 tabuleiros com uma das quatro casas pretas,
- 6 tabuleiros com duas das quatro casas pretas,
- 4 tabuleiros com três das quatro casas pretas e
- 1 tabuleiros com as quatro casas pretas.

Se considerarmos que os lados dos tabuleiros não estão marcados, então dois tabuleiros são considerados "*equivalentes*" se um deles pode ser obtido do outro por rotação. Neste caso temos

- os 4 tabuleiros com uma casa preta são considerados equivalentes,
- os 2 tabuleiros com duas casas pretas na "diagonal" são considerados equivalentes,
- os 4 tabuleiros com 2 casas pretas adjacentes são considerados equivalentes e
- os 4 tabuleiros com três casas pretas são considerados equivalentes.

Deste modo, entre os 16 tabuleiros iniciais, existem 6 "tipos" que são considerados "*não-equivalentes*".

Agora, não vamos mais considerar as diferenças baseadas em "preto e branco", mas somente o padrão de contraste dos tabuleiros. Assim, por exemplo, o tabuleiro todo branco e o tabuleiro todo preto têm o mesmo padrão de contraste. Se, além disso, pudermos considerar rotações, então teremos somente 4 padrões de contraste não-equivalentes.

Neste capítulo, nós vamos estudar a teoria de enumeração de objetos não-equivalentes introduzida por Pólya em 1938. Primeiramente, porém, vamos dar algumas noções básicas da teoria de conjuntos, relações e grupos que serão necessárias para as seções posteriores.

2 Noções de relações e grupos

Nesta seção, vamos assumir que o leitor tem as noções elementares de teoria de conjuntos e vamos introduzir uma terminologia que será usada no restante do capítulo.

Definição 5.1. *Uma* ***relação binária*** *entre dois conjuntos S e T é um subconjunto dos pares ordenados no produto cartesiano $S \times T$.*

Exemplo 5.2. *O conjunto $\{(a,1),(a,2),(c,2)\}$ é uma relação binária entre os conjuntos $\{a,b,c\}$ e $\{1,2\}$.*

Definição 5.3. *Uma relação binária num conjunto S é dita uma* ***relação de equivalência*** *se valem a propriedades*

- *(**reflexiva**) todo elemento do conjunto está relacionado com ele mesmo;*
- *(**simétrica**) para quaisquer dois elementos a e b de S, se a está relacionado com b, então b está relacionado com a;*
- *(**transitiva**) para quaisquer três elementos a, b e c de S, se a está relacionado com b e b está relacionado com c, então a está relacionado com c.*

Exemplo 5.4. *Seja $S = \{a,b,c,d\}$. Consideremos as seguinte relações binárias:*

1. $\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c),(c,d),(d,c),(d,d)\}$;
2. $\{(a,a),(a,b),(b,b),(a,d),(c,c),(d,c),(d,d),(b,d)\}$.

Então a relação em 1. é uma relação de equivalência enquanto que a relação em 2. não é (verifique!).

Definição 5.5. *Dada uma relação de equivalência num conjunto S, podemos dividir os elementos de S em classes de forma que dois elementos estejam na mesma classe se e somente se eles estão relacionados. Estas classes de elementos de S são chamadas* ***classes de equivalência*** *em que S é dividido através da relação de equivalência. Dois elementos de S são ditos* ***equivalentes****, se eles pertencem à mesma classe de equivalência.*

Observação 5.6. *Como conseqüência da Definição 5.5, podemos notar que*

(i) todo elemento de S pertence a uma classe de equivalência pois, pela propriedade reflexiva, ele está (pelo menos) na classe formada por ele mesmo;

(ii) pela propriedade simétrica não há ambiguidade no fato de um elemento pertencer a uma certa classe;

(iii) pela propriedade transitiva, nenhum elemento de S pertence a mais do que uma classe.

Pela Definição 5.5 e pela Observação 5.6 temos que uma relação de equivalência induz uma partição, num conjunto S, em que os subconjuntos disjuntos são as classes de equivalência.

Exemplo 5.7. *Consideremos a partição induzida pela relação de equivalência no conjunto* $S = \{a, b, c, d\}$ *dada pelo Exemplo 5.4, ítem 1. Então esta partição é dada por*

$$\{\{a, b\}, \{c, d\}\}\,.$$

Definição 5.8. *Uma* ***operação binária*** *num conjunto* S *é uma função do conjunto* $S \times S$ *num conjunto* T. *Uma* ***operação binária*** *num conjunto* S *é dita* ***fechada*** *se ela for uma função de* $S \times S$ *em* S. *Um conjunto* S *com uma operação binária* $*$ *em* S *(escrevemos* $(S, *)$*) é um* ***grupo****, se as seguintes propriedades são satisfeitas:*

(i) $(S, *)$ *é fechada;*

(ii) $(S, *)$ *é associativa, isto é*

$$(a * b) * c = a * (b * c), \qquad \forall\ a, b, c \in S;$$

(iii) (elemento neutro) existe $e \in S$ *tal que*

$$a * e = a, \qquad \forall\ a \in S;$$

(iv) (elemento inverso) existe $a^{-1} \in S$ *tal que*

$$a * a^{-1} = e, \qquad \forall\ a \in S.$$

Seja $(S, *)$ um grupo. As propriedades abaixo seguem das propriedades de grupo. Verifique-as como exercício.

(v) Se b é um inverso de a, então a é um inverso de b.

(vi) Para todo $a \in S$, $e * a = a$.

(vii) O elemento identidade $e \in S$ é único.

(viii) O inverso de qualquer elemento $a \in S$ é único.

3 Classes de equivalência sob um grupo de permutação

Definição 5.9. *Uma função injetora de um conjunto* S *nele mesmo é chamada* ***permutação*** *sobre* S.

Observação 5.10. *Note que a definição acima para permutações está de acordo com a definição apresentada no Capítulo 1.*

Notação. Se $S = \{a, b, c, d\}$, então denotamos por

$$\begin{pmatrix} abcd \\ bdca \end{pmatrix}$$

a permutação que leva a em b, b em d, c em c e d em a.

Não é difícil de verificarmos que a composição de duas permutações π_1 e π_2 sobre um conjunto S (escrevemos $\pi_1\pi_2$) também é uma permutação sobre S. Basta notarmos que a composição de funções injetoras é uma função injetora o que implica que a composição de permutações é uma operação binária fechada. Entretanto a composição de permutações é não-comutativa pois, em geral, se π_1 e π_2 são duas permutações sobre S, então vale

$$\pi_1\pi_2 \neq \pi_2\pi_1 \qquad \text{(Dê um exemplo.)}$$

Por outro lado, a composição de permutações é associativa ou seja, se π_1, π_2 e π_3 são permutações sobre S, então vale

$$(\pi_1\pi_2)\pi_3 = \pi_1(\pi_2\pi_3).$$

Na realidade, a composição de permutações é um grupo: a permutação identidade, que leva um elemento de S nele mesmo, é o elemento neutro das permutações e, dada uma permutação π_1 sobre S, existe uma permutação π_2 sobre S tal que $\pi_1\pi_2$ é a permutação identidade.

Definição 5.11. *Seja $G = \{\pi_1\pi_2, \ldots\}$ o conjunto de todas as permutações sobre um conjunto S e seja $*$ a operação binária de composição de permutações sobre S. Então $(G, *)$ é dito um **grupo de permutação** sobre S.*

Exemplo 5.12. *O conjunto*

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} abc \\ abc \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abc \\ bca \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abc \\ cab \end{pmatrix} \right\}$$

é um grupo de permutação sobre o conjunto $S = \{a, b, c\}$.

Definição 5.13. *Seja G um grupo de permutação de um conjunto $S = \{a, b, \ldots\}$. Uma relação binária em S é uma **relação binária induzida** por G, se vale a propriedade:*

> *"um elemento $a \in S$ está relacionado com um elemento $b \in S$ se e somente se existe uma permutação em G que leva a em b".*

Exemplo 5.14. *Seja*

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} abcd \\ abcd \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abcd \\ bacd \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abcd \\ abdc \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abcd \\ badc \end{pmatrix} \right\}.$$

Então a relação binária induzida por G é

$$\{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c), (c, d), (d, c), (d, d)\}.$$

Teorema 5.15. *Qualquer relação binária num conjunto induzida por um grupo de permutação do conjunto é uma relação de equivalência.*

Demonstração. Seja G um grupo de permutação do conjunto $S = \{a, b, \ldots\}$.

(i) A permutação identidade pertence à G. Portanto qualquer elemento $a \in S$ pode ser relacionado com ele mesmo pela relação binária sobre S induzida por G. Logo vale a propriedade reflexiva.

(ii) Se existe $\pi_1 \in G$ que leva a em b, então a permutação $\pi_2 \in G$, inversa de π_1, leva b em a e, portanto, a propriedade de simetria está verificada.

(iii) Se existe $\pi_1 \in G$ que leva a em b e existe $\pi_2 \in G$ que leva b em c, então a permutação composta $\pi_1\pi_2 \in G$ leva a em c. Logo a relação binária em S induzida por G também satisfaz a propriedade transitiva.

A tese segue de (i), (ii) e (iii). □

Dados um conjunto S e um grupo de permutação G de S, nós gostaríamos de saber qual o número de classes de equivalência em que S é dividido pela relação de equivalência em S induzida por G. Quando S possui um número pequeno de elementos, este problema pode ser resolvido diretamente achando-se a relação de equivalência e, depois, contando-se o número de classes de equivalência. Porém, quando o número de elementos de S for grande, esta contagem, se não for difícil, será entediante. Para resolvermos este problema, temos o Teorema de Burnside que determina o número de classes de equivalência pela contagem do número de elementos que são invariantes sob a permutação no grupo. Vejamos a definição que segue.

Definição 5.16. *Um elemento de um conjunto S é dito invariante sob uma permutação sobre S, se a permutação levar este elemento nele mesmo.*

Exemplo 5.17. *Voltemos ao nosso problema inicial dos tabuleiros de 2×2 casas. Sejam π_1, π_2, π_3 e π_4, respectivamente, as permutações dos tabuleiros que correspondem às rotações horárias de 90^o, 180^o, 270^o e 0^o. Então $G = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4\}$ é um grupo de permutações sobre o conjunto dos tabuleiros. Na relação de equivalência induzida por G temos, por exemplo, que o tabuleiro cuja primeira casa é preta está relacionado com um dos tabuleiros que possuem somente uma casa preta por uma das permutações π_1, π_2, π_3 ou π_4. Logo estes tabuleiros que só têm uma casa preta pertencem à mesma classe de equivalência, pois eles são indistinguíveis por rotações. De modo análogo, podemos analisar as outras classes de equivalência e teremos que o número de classes de equivalência nos quais o conjunto dos tabuleiros é dividido por G é o número de tabuleiros "distintos" por rotações. Então dois tabuleiros são distintos se um não pode ser obtido do outro por rotações. O leitor pode verificar que existem 6 classes de equivalência induzidas por G.*

A seguir apresentamos o Teorema de Burnside sem demonstração. O leitor interessado pode consultar [2] para uma prova do teorema.

Teorema 5.18 (Burnside). *O número de classes de equivalência nas quais um conjunto S é dividido pela relação de equivalência induzida por um grupo de permutação G sobre S é dado por*

$$\frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G}\phi(\pi),$$

onde $|G|$ é o número de elementos de G e $\phi(\pi)$ é o número de elementos que são invariantes sob a permutação π.

Exemplo 5.19. *Sejam $S = \{a, b, c, d\}$ um conjunto e $G = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4\}$ um grupo de permutações sobre S tal que*

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} abcd \\ abcd \end{pmatrix}, \qquad \pi_2 = \begin{pmatrix} abcd \\ bacd \end{pmatrix}, \qquad \pi_3 = \begin{pmatrix} abcd \\ abdc \end{pmatrix}, \qquad \pi_4 = \begin{pmatrix} abcd \\ badc \end{pmatrix}.$$

A relação de equivalência em S induzida por G é dada por

$$\{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c), (c, d), (d, c), (d, d)\}.$$

Então S está dividido em duas classes de equivalência

$$\{a, b\} \qquad e \qquad \{c, d\}.$$

Verifiquemos este fato usando o Teorema de Burnside (Teorema 5.18). Temos

$$|G| = 4, \quad \phi(\pi_1) = 4, \quad \phi(\pi_2) = 2, \quad \phi(\pi_3) = 2, \quad \phi(\pi_4) = 0.$$

Logo o número de classes de equivalência é

$$\frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^{4} \phi(\pi_i) = \frac{1}{4} (4 + 2 + 2 + 0) = 2.$$

Exemplo 5.20. *Qual o número de "strings" distintas de 2 contas que podem ser feitas com contas azuis e vermelhas?*

Temos as seguintes "strings":

$$aa, \quad av, \quad va, \quad vv,$$

onde a e v indicam, respectivamente, uma conta azul e uma conta vermelha. Suponhamos que as terminações de uma "string" não sejam marcadas. Portanto duas "strings" são consideradas indistinguíveis se uma delas pode ser obtida da outra através da "troca" das terminações (isto é, vira-se a tal "string" de lado e obtém-se uma outra). Assim, por exempo, as "strings"

$$av \qquad e \qquad va$$

são consideradas não-distintas. Logo existem 3 conjuntos de "strings" distintas a saber

$$\{aa\}, \quad \{av, va\} \quad e \quad \{vv\}.$$

Para chegarmos à mesma conclusão usando o Teorema de Burnside (Teorema 5.18), consideremos

$$S = \{aa, av, va, vv\}$$

dividido pela relação de equivalência induzida pelo grupo de permutação $G = \{\pi_1, \pi_2\}$, onde

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} aa\ av\ va\ vv \\ aa\ av\ va\ vv \end{pmatrix} \qquad e \qquad \pi_2 = \begin{pmatrix} aa\ av\ va\ vv \\ aa\ va\ av\ vv \end{pmatrix}.$$

A permutação π_1 indica que cada "string" é equivalente à si mesma e a permutação π_2 indica a equivalência de "strings" quando as terminações são trocadas. Então temos

$$|G| = 2, \qquad \phi(\pi_1) = 4, \qquad \phi(\pi_2) = 2$$

donde, pelo Teorema de Burnside, segue que existem

$$\frac{1}{2}(4+2) = 3$$

classes de equivalência de "strings", ou seja, existem 3 *"strings" distintas sob a relação de equivalência considerada.*

Exemplo 5.21. *Consideremos o problema de determinarmos o número de modos de arranjarmos n pessoas em círculo (reveja o Exemplo 1.9).*

Seja S o conjunto dos $n!$ modos de arranjarmos n pessoas em círculo quando a equivalência por rotação não é levada em conta (o que equivale a arranjarmos n pessoas em fila). Seja $G = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3 \ldots \pi_n\}$ um grupo de permutações sobre S onde π_1 é a permutação identidade, π_2 leva um arranjo circular num outro arranjo que é obtido através da rotação horária de uma posição do primeiro arranjo, π_3 leva um arranjo circular num outro arranjo que é obtido através da rotação horária de duas posições do primeiro arranjo e assim por diante até e π_n que leva um arranjo circular num outro arranjo que é obtido do primeiro arranjo através da rotação horária de $(n-1)$ posições. Então temos

$$|G| = n, \qquad \phi(\pi_1) = n! \qquad e \qquad \phi(\pi_2) = \phi(\pi_3) = \ldots \phi(\pi_n) = 0.$$

Portanto, pelo Teorema de Burnside, o número de arranjos circulares distintos por rotações de n pessoas é

$$\frac{1}{n}(n! + 0 + 0 + \ldots + 0) = (n-1)!$$

Exemplo 5.22. *Suponhamos que devemos imprimir todos os números de* 5 *algarismos em folhas de papel sendo que somente um número deve ser impresso por folha. Sabemos que* 10^5 *números devem ser impressos. Para números menores do que* 10000*, vamos considerar que os espaços vazios são preenchidos por zeros. Assim, por exemplo, o número* 100 *será impresso como* 00100*. Além disso, podemos observar que, quando lidos de ponta cabeça, os algarismos* 0, 1, 6, 8 *e* 9 *se tornam* 0, 1, 9, 8 *e* 6 *respectivamente. Logo existirão pares de números que poderão ser lidos na mesma folha conforme a folha seja ou não virada de cabeça para baixo. Por exemplo: uma mesma folha apresentará os números* 89166 *e* 99168 *conforme ela esteja de cabeça para baixo ou não. Sob estas hipóteses, quantas folhas serão necessárias para imprimirmos os* 10^5 *números?*

Seja S o conjunto dos 10^5 *números e seja $G = \{\pi_1, \pi_2\}$ um grupo de permutações sobre S, onde*

- *π_1 é a permutação identidade;*
- *π_2 é a permutação que leva um número nele mesmo, se este número não puder ser lido de ponta cabeça (por exemplo: $\pi_2(13765) = 13765$), e π_2 leva um número no número obtido a partir do primeiro quando ele for lido de ponta cabeça.*

Então temos

$$|G| = 2 \qquad e \qquad \phi(\pi_1) = 10^5.$$

Além disso,

- *existem*
$$10^5 - 5^5 \tag{5.1}$$
números que contém um ou mais algarismos entre os algarismos 2, 3, 4, 5 *e* 7 *e, portanto não podem ser lidos de ponta cabeça;*

- *existem números que podem ser lidos da mesma forma estando ou não de ponta cabeça (por exemplo: 16891). Estes números são tais que a posição central só pode ser ocupada por um dos algarismos* 0, 1 *ou* 8*, o quinto ou último algarismo precisa ser o primeiro de cabeça para baixo e o quarto algarismo precisa ser o segundo de cabeça para baixo. Logo a quarta e quinta posições estão determinadas pelas duas primeiras. Portanto existem*
$$5 \cdot 5 \cdot 3 = 5^2 \cdot 3 \tag{5.2}$$
destes números.

Então podemos concluir de (5.1) *e* (5.2) *que*

$$\phi(\pi_2) = 10^5 - 5^5 + 5^2 \cdot 3.$$

Finalmente, segue do Teorema de Burnside que o número de folhas necessárias é

$$\frac{1}{2}\left(10^5 + 10^5 - 5^5 + 5^2 \cdot 3\right) = 10^5 - \frac{1}{2}\,5^5 + \frac{3}{2}\,5^2.$$

A seguir, vamos dar uma generalização do Teorema de Burnside (Teorema 5.18) que será utilizada na demonstração do resultado principal deste capítulo: o Teorema Fundamental de Pólya, que veremos na última seção.

Sejam Q um grupo formado pelos elementos $q_1, q_2, \ldots$ e uma operação binária $*$. Seja $S = \{a, b, \ldots\}$. Suponhamos que, a cada elemento $q \in Q$ está associada uma permutação π_q do conjunto S tal que, para quaisquer $q_1, q_2 \in Q$, temos

$$\pi_{q_1 * q_2} = \pi_{q_1}\pi_{q_2}. \tag{5.3}$$

Então a permutação associada ao elemento $q_1 * q_2$ coincide com a composição das permutações π_{q_1} e π_{q_2}, que são as permutações associadas aos elementos q_1 e q_2 respectivamente.

Definição 5.23. *A condição* (5.3) *sobre* $(Q, *)$ *é chamada* ***condição de homomorfismo****.*

Observação 5.24. *Note que elementos diferentes de* Q *não precisam estar associados a permutações distintas.*

Consideremos uma relação binária sobre S, chamada relação binária induzida por Q, onde elementos a e b de S estão relacionados se e somente se existir uma permutação π_q associada a um elemento $q \in Q$ que leve a em b. Com isto, temos os resultados seguintes.

Teorema 5.25. *A relação binária induzida por Q em S é uma relação de equivalência.*

Teorema 5.26. *O número de classes de equivalência nas quais um conjunto S é dividido pela relação de equivalência induzida por Q é*

$$\frac{1}{|Q|}\sum_{q\in Q}\phi(\pi_q),$$

onde $|Q|$ é o número de elementos de Q e $\phi(\pi_q)$ é o número de elementos que são invariantes sob a permutação π_q associada ao elemento $q \in Q$.

A prova do Teorema 5.25 segue os passos da demonstração do Teorema 5.15 e a prova do Teorema 5.26 pode ser encontrada em [2], p. 141.

Pode-se provar, ainda, o seguinte fato importante: o conjunto das permutações associadas aos elementos de Q formam um grupo de permutações.

4 Classes de equivalências de funções

Seja f uma função com domínio D e imagem R. Como cada elemento de D tem uma única imagem em R, podemos "ver" a função f como *uma* distribuição dos $|D|$ objetos de D em $|R|$ lugares de R. Assim o problema de enumerarmos os modos de distribuição de $|D|$ objetos em $|R|$ lugares é equivalente a enumerarmos as $|R|^{|D|}$ funções de D em R. Por esta razão, a discussão desta seção será conduzida em termos de funções entre conjuntos.

Sejam D e R dois conjuntos e seja G um grupo de permutações sobre D. Podemos definir uma relação binária no conjunto de todas as funções de D em R da seguinte forma: uma função f_1 está relacionada com outra função f_2 se e somente se existir uma permutação $\pi \in G$ tal que

$$f_1(d) = f_2(\pi(d)), \quad \forall\, d \in D.$$

Então esta relação binária induzida por G é uma relação de equivalência. De fato, pois

(i) a permutação identidade pertence a G o que implica que a propriedade reflexiva está satisfeita;

(ii) se

$$f_1(d) = f_2(\pi(d)), \quad \forall\, d \in D,$$

então

$$f_2(d) = f_1(\pi^{-1}(d)), \quad \forall\, d \in D,$$

e, como $\pi^{-1} \in G$, segue a propriedade simétrica;

(iii) se

$$f_1(d) = f_2(\pi_1(d)), \quad \forall\, d \in D,$$

e

$$f_2(d) = f_3(\pi_2(d)), \quad \forall\, d \in D,$$

onde $\pi_1\pi_2 \in D$, então

$$f_1(d) = f_3(\pi_2\pi_1(d)), \quad \forall\, d \in D,$$

e, como $\pi_2\pi_1 \in G$, a propriedade transitiva vale.

Como conseqüência deste fato, as funções de D em R podem ser divididas em classes de equivalência por esta relação de equivalência. E estas classes de equivalência são chamadas **padrões**. Cada padrão corresponde à uma maneira diferente de distribuirmos $|D|$ objetos em $|R|$ lugares quando a equivalência entre as maneiras de distribuição for introduzida pelo grupo de permutações G.

Exemplo 5.27. *Sejam* $D = \{a, b, c, d\}$*,* $R = \{x, y\}$ *e* $G = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4\}$ *um grupo de permutações sobre* D *tal que*

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} abcd \\ bcda \end{pmatrix}, \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} abcd \\ cdab \end{pmatrix}, \quad \pi_3 = \begin{pmatrix} abcd \\ dabc \end{pmatrix}, \quad \pi_4 = \begin{pmatrix} abcd \\ abcd \end{pmatrix}.$$

Então existem 16 *funções* $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_{16}$ *de* D *em* R *como mostra a Tabela 5.1 a seguir. Cada entrada na i-ésima linha da tabela corresponde ao valor* $f_i(a)$*,* $f_i(b)$*,* $f_i(c)$ *ou* $f_i(d)$*, conforme as colunas a, b, c, ou d respectivamente.*

Tabela 5.1:

	a	b	c	d
f_1	x	x	x	x
f_2	y	x	x	x
f_3	x	y	x	x
f_4	x	x	y	x
f_5	x	x	x	y
f_6	y	y	x	x
f_7	y	x	y	x
f_8	y	x	x	y
f_9	x	y	y	x
f_{10}	x	y	x	y
f_{11}	x	x	y	y
f_{12}	y	y	y	x
f_{13}	y	y	x	y
f_{14}	y	x	y	y
f_{15}	x	y	y	y
f_{16}	y	y	y	y

Por exemplo, pela tabela acima, podemos observar que

$$\begin{array}{lcl} f_3(\pi_1(a)) = f_3(b) = y & e & f_2(a) = y \\ f_3(\pi_1(b)) = f_3(c) = x & e & f_2(b) = x \\ f_3(\pi_1(c)) = f_3(d) = x & e & f_2(c) = x \\ f_3(\pi_1(d)) = f_3(a) = x & e & f_2(d) = x \end{array}$$

ou seja, existe $\pi = \pi_1 \in G$ *tal que*

$$f_2(d) = f_3(\pi(d)), \quad \forall\, d \in D.$$

Logo as funções f_2 *e* f_3 *são equivalentes. Além disso, através da Tabela 5.1, podemos notar que as* 16 *funções estão divididas em seis classes de equivalência:*

$$\{f_1\},\ \{f_2, f_3, f_4, f_5\},\ \{f_6, f_8, f_9, f_{11}\},\ \{f_7, f_{10}\},\ \{f_{12}, f_{13}, f_{14}, f_{15}\}\ e\ \{f_{16}\}.$$

Voltemos ao nosso problema inicial dos tabuleiros.

Exemplo 5.28. *Consideremos o problema dos tabuleiros de* 2×2 *casas introduzido no começo do capítulo. Denotemos por* a*,* b*,* c *e* d *cada uma das* 4 *casas e fixemos esta notação. Sejam* x *e* y*, respectivamente, as cores branca e preta. Sejam* $D = \{a, b, c, d\}$ *e* $R = \{x, y\}$*. Então uma função de* D *em* R *corresponde a um tabuleiro. O grupo de permutações*

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} abcd \\ bcda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abcd \\ cdab \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abcd \\ dabc \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abcd \\ abcd \end{pmatrix} \right\}$$

sobre D *corresponde às rotações dos tabuleiros (*90^o*,* 180^o*,* 270^o *e* 0^o *respectivamente). Cada uma das* 16 *funções do exemplo anterior (Exemplo 5.27) corresponde a um dos* 16 *tabuleiros que, conforme o mesmo exemplo, estão divididos em* 6 *classes de equivalência pela relação de equivalência induzida por* G*.*

5 Pesos e inventários de funções

Além do interesse em contarmos o número de classes de equivalência de funções, também estamos interessados em obter informações sobre propriedades destas funções em suas classes de equivalência. Por este motivo, vamos introduzir a noção de *peso* e de *inventário* de uma função.

Definição 5.29. *Consideremos o conjunto das* $|R|^{|D|}$ *funções cujo domínio é* D *e a imagem é* R*. Suponhamos que um* ***peso*** *é atribuído a cada elemento de* R*. Para cada* $r \in R$*, denotamos por* $w(r)$ *o peso atribuído a* r*. Então o* ***enumerador de armazenagem*** *ou* ***armazenador*** *de* R *é a soma dos pesos dos elementos de* R*, ou seja*

$$\text{armazenador de } R = \sum_{r \in R} w(r).$$

Observação 5.30. *Como os elementos de* R *são os valores que os elementos de* D *podem assumir pela ação das* $|R|^{|D|}$ *funções, o armazenador descreve o que está sendo "armazenado". Assim, por exemplo, para* $R = \{r_1, r_2, r_3\}$*, se* $w(r_1) = r_1$*,* $w(r_2) = r_2$ *e* $w(r_3) = r_3$*, então o armazenador de* R *é*

$$r_1 + r_2 + r_3$$

e indica que o valor que um elemento de D *assume é*

$$r_1 \qquad ou \qquad r_2 \qquad ou \qquad r_3.$$

Agora, suponhamos que $w(r_1) = u = w(r_3)$ e $w(r_2) = v$. Então o armazenador de R é

$$2u + v$$

e indica que existem 2 elementos do tipo u e um elemento do tipo v em R dos quais um valor para um elemento de D pode ser escolhido. Em outras palavras, um elemento de D assume ou um dos valores dos elementos de R do tipo u ou o valor do elemento de R do tipo v.

Agora, vamos definir o *peso* de uma função.

Definição 5.31. *Dada uma função $f : D \to R$, onde D e R são, respectivamente, o domínio e a imagem de f, definimos o **peso** de f, denotado por $\mathcal{W}(f)$, como sendo o produto dos pesos das imagens dos elementos de D sob a ação de f, ou seja*

$$\mathcal{W}(f) = \prod_{d \in D} w(f(d)).$$

Definição 5.32. *Uma **lista** ou **inventário** de um conjunto F de funções é a soma dos seus pesos, isto é*

$$\textit{inventário de um conjunto de funções} = \sum_{f \in F} \mathcal{W}(f).$$

Observação 5.33. *Note que, enquanto o peso de uma função pode ser visto como uma representação de <u>uma</u> maneira (determinada por f) de distribuirmos $|D|$ objetos em $|R|$ lugares, o inventário de um conjunto de funções é uma representação de <u>todas</u> as possíveis maneiras de distribuirmos os objetos.*

Exemplo 5.34. *Sejam $D = \{d_1, d_2, d_3\}$, $R = \{r_1, r_2, r_3\}$, $w(r_1) = u = w(r_3)$ e $w(r_2) = v$. Consideremos as seguintes funções $f_1, f_2, f_3 : D \to R$ definidas por*

$$\begin{array}{lll} f_1(d_1) = r_1 & f_2(d_1) = r_1 & f_3(d_1) = r_2 \\ f_1(d_2) = r_2 & f_2(d_2) = r_2 & f_3(d_2) = r_1 \\ f_1(d_3) = r_2 & f_2(d_3) = r_1 & f_3(d_3) = r_3 \end{array}$$

Então

$$\mathcal{W}(f_1) = uv^2, \qquad \mathcal{W}(f_2) = u^2v, \qquad \mathcal{W}(f_1) = u^2v.$$

Portanto o inventário do conjunto de funções $\{f_1, f_2, f_3\}$ é dado por

$$\mathcal{W}(f_1) + \mathcal{W}(f_2) + \mathcal{W}(f_1) = uv^2 + 2u^2v.$$

Seja G um grupo de permutações sobre D. Pela seção anterior, as $|R|^{|D|}$ funções podem ser divididas em classes de equivalência através da relação de equivalência induzida por G. Sejam f_1 e f_2 duas funções pertencentes à mesma classe de equivalência. Como existe $\pi \in G$ tal que

$$f_1(d) = f_2(\pi(d)), \qquad \forall\, d \in D,$$

segue que

$$\prod_{d \in D} w(f_1(d)) = \prod_{d \in D} w(f_2(\pi(d))). \tag{5.4}$$

Entretanto,

$$\prod_{d\in D} w(f_2(\pi(d))) = \prod_{d\in D} w(f_2(d)), \tag{5.5}$$

uma vez que os dois produtos têm os mesmos fatores porém em ordens diferentes. Logo (5.4) e (5.5) implicam que

$$\prod_{d\in D} w(f_1(d)) = \prod_{d\in D} w(f_2(d)),$$

ou seja

$$\mathcal{W}(f_1) = \mathcal{W}(f_2).$$

Então as funções de uma mesma classe de equivalência possuem o mesmo peso. Assim, podemos dar a seguinte definição.

Definição 5.35. *O peso de uma função (qualquer) de uma classe de equivalência é chamado* ***peso padrão*** *ou simplesmente* ***padrão*** *da classe de equivalência.*

Observação 5.36. *Note que, funções de mesmo peso não pertencem, necessariamente, à mesma classe de equivalência.*

Definição 5.37. *O* ***inventário*** *de um conjunto de padrões é a soma destes padrões.*

Exemplo 5.38. *Quais as maneiras possíveis de pintarmos* 3 *bolas com uma única cor quando dispomos de* 3 *tipos de tintas:*

1. *uma tinta vermelha cara;*
2. *uma tinta vermelha barata;*
3. *uma tinta azul.*

Sejam D o conjunto das bolas e R o conjunto das tintas. Sejam v_1, v_2 e a os pesos de cada uma das tintas em 1., 2., e 3. respectivamente. Então o armazenador de R é dado por

$$v_1 + v_2 + a$$

e determina as maneiras de pintarmos <u>*uma*</u> *bola. Então as maneiras de pintarmos as* 3 *bolas são representadas por*

$$(v_1 + v_2 + a)^3, \tag{5.6}$$

ou seja (5.6) *é o inventário do conjunto das funções de D em R. Podemos reescrever* (5.6) *como*

$$(v_1 + v_2 + a)^3 = v_1^3 + v_2^3 + a^3 + 3v_1^2v_2 + 3v_1v_2^2 + 3v_1^2a + 3v_2^2a + 3v_1a^2 + 3v_2a^2 + 6v_1v_2a \tag{5.7}$$

de onde temos todas as informações sobre as diferentes maneiras de pintarmos as bolas. Por exemplo, o termo

$$3v_1v_2^2$$

significa que existem 3 *modos de pintarmos as* 3 *bolas nos quais a tinta cara é usada em uma bola e a tinta barata é usada nas outras duas bolas.*

Modifiquemos o exemplo acima.

Exemplo 5.39. *Consideremos o problema do exemplo anterior (Exemplo 5.38) com a mesma notação, mas, agora, os pesos para cada uma das tintas vermelhas é v e seja a o peso para a tinta azul. O armazenador de R é*

$$2v + a$$

e indica que existem 2 maneiras de pintarmos uma bola de vermelho e uma maneira de pintarmos uma bola de azul. O inventário para o conjunto das funções de D em R é

$$(v + v + a)^3 = (2v + a)^3 = 8v^3 + 12v^2a + 6va^2 + a^3 \tag{5.8}$$

O termo

$$8v^3$$

em (5.8) *significa que existem* 8 *modos em que as* 3 *bolas são pintadas de vermelho; o termo*

$$12v^2a$$

em (5.8) *significa que existem* 12 *modos em que* 2 *bolas são pintadas de vermelho e* 1 *bola é pintada de azul, e assim por diante.*

Observação 5.40. *Nas condições do Exemplo 5.39, os dois tipos de tintas vermelhas são distintos mesmo com a atribuição de pesos iguais. Por exemplo, pintarmos* 3 *bolas com a tinta cara é diferente de pintarmos as* 3 *bolas com a tinta barata. Estes dois modos de pintarmos as bolas estão contados como* 2 *modos de pintarmos as bolas de vermelho (*verifique!*). Se os dois tipos de tintas são indistinguíveis, então existe somente um tipo de tinta vermelha e, neste caso, o armazenador é dado por*

$$v + a.$$

Exemplo 5.41. *Consideremos* 8 *pessoas que planejam viajar e* 3 *cidades para serem visitadas. Cada pessoa deve visitar uma cidade. Porém as pessoas de uma mesma família devem viajar juntas e, destas* 8 *pessoas,* 3 *pertencem à mesma família e* 2 *pertencem a uma outra família. Quais as possíveis viagens para cada uma das* 8 *pessoas?*

Seja $D = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ o conjunto das 8 *pessoas. Suponhamos que a, b e c pertençam à mesma família e que d e e pertençam à outra família. Seja $R = \{c_1, c_2, c_3\}$ o conjunto das cidades e sejam α, β e γ os pesos para as cidades c_1, c_2 e c_3 respectivamente. A representação das diferentes viagens que a, b e c podem fazer é*

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3,$$

pois eles devem visitar c_1 juntos ou c_2 juntos ou c_3 juntos. Analogamente, a representação das diferentes viagens que d e e podem fazer é

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2.$$

A representação das diferentes viagens que <u>cada</u> uma das pessoas f, g e h pode fazer é

$$\alpha + \beta + \gamma.$$

Logo os diferentes modos das 8 *pessoas viajarem são descritos por*

$$\left(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3\right)\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right)(\alpha + \beta + \gamma)^3.$$

6 Teorema Fundamental de Pólya

Sejam D e R dois conjuntos e G um grupo de permutações sobre D. Nos interessa determinar o inventário das classes de equivalência das funções de D em R. Este inventário também pode ser chamado de **inventário padrão**. Como já foi visto nas seções anteriores (veja, especialmente, as Definições 5.32 e 5.37), o inventário padrão é uma representação dos diferentes modos de distribuirmos os objetos de D nos lugares de R.

Consideremos as $|R|^{|D|}$ funções de D em R. Vamos separar estas funções por categorias dependendo de seus pesos. Sejam

$$F_1,\, F_2,\, \ldots,\, F_i,\, \ldots$$

os conjuntos das funções que possuem pesos

$$\mathcal{W}_1,\, \mathcal{W}_2,\, \ldots,\, \mathcal{W}_i,\, \ldots$$

respectivamente. Dada uma permutação $\pi \in G$, seja $\pi^{(i)}$ uma função de F_i em F_i tal que

$$\text{se } f_1 \in F_i, \text{ então } \pi^{(i)}(f_1) = f_2,$$

onde

$$f_1(d) = f_2(\pi(d)), \quad \forall\, d \in D.$$

Note que, de fato $f_2 \in F_i$, uma vez que ambas as funções f_1 e f_2 têm o mesmo peso $\mathcal{W}_i$.

Lema 5.42. *A função $\pi^{(i)}$ é uma permutação do conjunto F_i de funções.*

Demonstração. Basta mostrarmos que não existem duas funções em F_i que são levadas por $\pi^{(i)}$ na mesma função. Suponhamos que $f_1, f_3 \in F_i$ sejam tais que

$$\pi^{(i)}(f_1) = f_2 = \pi^{(i)}(f_3).$$

Então temos

$$\begin{aligned} f_1(d) &= f_2(\pi(d)), \qquad && \forall\, d \in D,\\ f_3(d) &= f_2(\pi(d)), \qquad && \forall\, d \in D. \end{aligned}$$

Logo

$$f_1(d) = f_3(d), \quad \forall\, d \in D,$$

ou seja

$$f_1 = f_3$$

e a demonstração está completa. □

Lema 5.43. *Dados $\pi_1, \pi_2 \in G$, temos*

$$(\pi_1\pi_2)^{(i)} = \pi_1^{(i)}\pi_2^{(i)}.$$

Demonstração. Sejam $f_1, f_2, f_3 \in F_i$ e suponhamos que

$$\pi_2^{(i)}(f_1) = f_2 \qquad \text{e} \qquad \pi_1^{(i)}(f_2) = f_3.$$

Então

$$\begin{aligned} f_1(d) &= f_2(\pi(d)), \qquad \forall\, d \in D, \\ f_2(d) &= f_3(\pi(d)), \qquad \forall\, d \in D. \end{aligned}$$

Logo

$$f_1(d) = f_3(\pi_1\pi_2(d)), \quad \forall\, d \in D,$$

o que implica que $\pi_1^{(i)}\pi_2^{(i)}$ e $(\pi_1\pi_2)^{(i)}$ levam f_1 em f_3. $\square$

A seguir, vamos definir *ciclo* em uma permutação. Para isto, consideremos o exemplo seguinte.

Exemplo 5.44. *Consideremos a permutação*

$$\begin{pmatrix} abcdef \\ cedabf \end{pmatrix}.$$

Dizemos que o conjunto $\{a, c, d\}$ forma um ciclo pois a é levado em c, c é levado em d e d é levado em a. Analogamente, $\{b, e\}$ forma um ciclo, uma vez que b é levado em e e e é levado em b. O conjunto $\{f\}$ também forma um ciclo.

Definição 5.45. *Um* ***ciclo*** *numa permutação é um subconjunto de elementos que podem ser permutados ciclicamente.*

Exemplo 5.46. *No Exemplo 5.44 temos uma ciclo de comprimento* 3*, um ciclo de comprimento* 2 *e um ciclo de comprimento* 1*.*

Definição 5.47. *Seja π uma permutação com b_1 ciclos de comprimento* 1*, b_2 ciclos de comprimento* 2*, ..., b_k ciclos de comprimento k, e assim por diante. Consideremos as variáveis formais*

$$x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$$

e a seguinte representação do número de ciclos dos vários comprimentos na permutação π, ou seja,

$$x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{b_k} \cdot \ldots. \tag{5.9}$$

A representação em (5.9) *é dita* ***representação da permutação por ciclos****.*

Definição 5.48. *Dado um grupo G de permutações, definimos o* ***índice*** *de um ciclo de G (escrevemos P_G) como sendo a soma das representações da estrutura por ciclos das permutações de G dividida pelo número de permutações de G, ou seja,*

$$P_G(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots) = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{b_k} \cdot \ldots. \tag{5.10}$$

Exemplo 5.49. *Seja $G = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4\}$ um grupo de permutações sobre $S = \{a, b, c, d\}$ tal que*

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} abcd \\ abcd \end{pmatrix}, \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} abcd \\ bacd \end{pmatrix}, \quad \pi_3 = \begin{pmatrix} abcd \\ abdc \end{pmatrix}, \quad \pi_4 = \begin{pmatrix} abcd \\ badc \end{pmatrix}.$$

As representações de estrutura por ciclos das permutações π_1, π_2, π_3 e π_4 são dadas, respectivamente, por

$$x_1^4, \quad x_1^2x_2^1, \quad x_1^2x_2^1 \quad e \quad x_2^2.$$

Portanto o índice de ciclos de G é

$$\frac{1}{4}(x_1^4 + x_1^2x_2 + x_1^2x_2 + x_2^2) = \frac{1}{4}(x_1^4 + 2x_1^2x_2 + x_2^2).$$

Com a notação anterior, podemos enunciar o seguinte teorema fundamental devido a Pólya.

Teorema 5.50 (Teorema Fundamental de Pólya). *O inventário das classes de equivalência das funções com domínio D e imagem R é*

$$P_G\left(\sum_{r\in R} w(r), \sum_{r\in R}[w(r)]^2, \ldots, \sum_{r\in R}[w(r)]^k, \ldots\right).$$

O Teorema Fundamental de Pólya nos diz que o inventário padrão das classes de equivalência das funções com domínio D e imagem R pode ser obtido substituindo-se x_1 por $\sum_{r\in R} w(r)$, x_2 por $\sum_{r\in R}[w(r)]^2$, $\ldots$, x_k por $\sum_{r\in R}[w(r)]^k$, e assim por diante, na expressão (5.10) do índice de ciclos $P_G(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$ do grupo de permutações G.

Demonstração. Seja m_i o número de classes de equivalência das funções com peso $\mathcal{W}_i$ (no conjunto F_i). Então o inventário padrão é

$$\sum_i m_i \mathcal{W}_i.$$

Pelo Teorema 5.26 e pelos Lemas 5.42 e 5.43, segue que

$$m_i = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi_i n G} \phi(\pi^{(i)}).$$

Portanto

$$\sum_i m_1 \mathcal{W}_i = \sum_i \left[\frac{1}{|G|}\sum_{\pi_i n G}\phi(\pi^{(i)})\right]\mathcal{W}_i = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi_i n G}\left[\sum_i \phi(\pi^{(i)})\mathcal{W}_i\right].$$

Mas

$$\sum_i \phi(\pi^{(i)})\mathcal{W}_i$$

é o inventário das funções f tais que

$$f(d) = f(\pi(d)), \quad \forall\, d \in D. \tag{5.11}$$

Além disso, dada uma função f, temos (5.11) se e somente se os elementos de D que estão em um ciclo em π são levados por f ao mesmo valor. Isto implica que

$$\sum_i \phi(\pi^{(i)})\mathcal{W}_i = \left[\sum_{r\in R} w(r)\right]^{b_1}\left[\sum_{r\in R}[w(r)]^2\right]^{b_2}\cdot\ldots\cdot\left[\sum_{r\in R}[w(r)]^k\right]^{b_k}\cdot\ldots,$$

onde $b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots$ são, respectivamente, os números de ciclos de comprimento $1, 2, \ldots, k, \ldots$ em π. Logo

$$\sum_i m_i \mathcal{W}_i = P_G \left(\sum_{r\in R} w(r), \sum_{r\in R} [w(r)]^2, \ldots, \sum_{r\in R} [w(r)]^k, \ldots \right)$$

o que completa a demonstração. $\square$

Corolário 5.51. *O número de classes de equivalência das funções de domínio D e imagem R é*

$$P_G\left(|R|, |R|, \ldots, |R|, \ldots\right).$$

Demonstração. Suponhamos que o peso 1 é atribuído a cada elemento $r \in R$. Então o peso de cada padrão também é 1. Deste modo, o inventário padrão, que é a soma dos pesos padrões no conjunto das funções, coincide com o número de padrões. $\square$

Voltemos ao problema das "strings" de contas vermelhas e azuis (veja Exemplo (5.20)). Desta vez, porém, vamos considerar "strings" de três contas.

Exemplo 5.52. *Consideremos contas das cores vermelha e azul. Qual o número de "strings" distintas de* 3 *contas?*

Seja $D = \{1, 2, 3\}$ o conjunto das posições de uma conta numa "string". Seja $R = \{v, a\}$ o conjunto dos tipos de contas (vermelha e azul, respectivamente). Consideremos

$$w(v) = v \qquad e \qquad w(a) = a$$

e seja $G = \{\pi_1, \pi_2\}$, onde

$$\pi_1 = \binom{123}{123}, \qquad \pi_2 = \binom{123}{321}. \tag{5.12}$$

Então a permutação π_1 corresponde a "deixar" uma "string" como ela estiver e a permutação π_2 corresponde a "trocar" as terminações de uma "string". De (5.12)*, temos que o índice de ciclos de G é*

$$P_G(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^3 + x_1 x_2). \tag{5.13}$$

Também temos

$$\begin{aligned} \sum_{r\in R} w(r) &= v + a \\ \sum_{r\in R} [w(r)]^2 &= v^2 + a^2 \end{aligned} \tag{5.14}$$

e, como

$$P_G(x_1, x_2) = P_G \left(\sum_{r\in R} w(r), \sum_{r\in R} [w(r)]^2 \right) \tag{5.15}$$

pelo Teorema Fundamental de Pólya (Teorema 5.50), segue de (5.13)*,* (5.14) *e* (5.15) *que o inventário padrão é*

$$P_G \left(\sum_{r\in R} w(r), \sum_{r\in R} [w(r)]^2 \right) = \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{r\in R} w(r) \right)^3 + \left(\sum_{r\in R} w(r) \right) \left(\sum_{r\in R} [w(r)]^2 \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(v+a)^3 + (v+a)(v^2+a^2)\right] = v^3 + 2v^2a + 2va^2 + a^3. \tag{5.16}$$

A partir do inventário padrão (5.16), *podemos concluir que*

- *existe* 1 *"string" formada por* 3 *contas vermelhas;*
- *existem* 2 *"strings" formadas por* 2 *contas vermelhas e* 1 *conta azul;*
- *existem* 2 *"strings" formadas por* 1 *conta vermelha e* 2 *contas azuis;*
- *existe* 1 *"string" formada por* 3 *contas azuis.*

Fazendo

$$w(v) = w(a) = 1$$

em (5.16), *obtemos o número de padrões que é* 6, *ou seja*

$$P_G(2,2) = \frac{1}{2}\left[(1+1)^3 + (1+1)(1^2+1^2)\right] = \frac{1}{2}(8 + 2\cdot 2) = 6$$

que indica o número de classes de equivalência pelo Corolário 5.51.

Exemplo 5.53. *Qual o número de modos de pintarmos as quatro faces de uma pirâmide com dois tipos de tintas?*

Seja $D = \{a, b, c, d\}$ *o conjunto das* 4 *faces da pirâmide e seja* d *a base da pirâmide. Seja* $R = \{x, y\}$ *o conjunto dos tipos de tintas. Sejam*

$$w(x) = x, \qquad w(y) = y$$

e $G = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3\}$ *o grupo de permutações sobre* S *que é dado por*

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} abcd \\ abcd \end{pmatrix}, \qquad \pi_2 = \begin{pmatrix} abcd \\ bcad \end{pmatrix}, \qquad \pi_3 = \begin{pmatrix} abcd \\ cabd \end{pmatrix},$$

onde a permutação π_2 *corresponde à rotação horária de* 120^o *em torno do eixo vertical (com relação à base* d*) e* π_3 *corresponde à rotação horária de* 240^o *em torno do eixo vertical (com relação à base* d*). Note que* d *permanece na mesma posição sob a ação de qualquer das permutações* π_1, π_2 *ou* π_3.

O índice de ciclos do grupo G *é dado por*

$$\frac{1}{3}(x_1^4 + x_1x_3 + x_1x_3) = \frac{1}{3}(x_1^4 + 2x_1x_3), \tag{5.17}$$

pois π_1 *possui* 4 *ciclos de comprimento* 1, π_2 *possui* 1 *ciclo de comprimento* 1 *e* 1 *ciclo de comprimento* 3 *e* π_3 *possui* 1 *ciclo de comprimento* 1 *e* 1 *ciclo de comprimento* 3. *Também temos que*

$$\sum_{r\in R} w(r) = x + y,$$
$$\sum_{r\in R} [w(r)]^2 = x^2 + y^2,$$
$$\sum_{r\in R} [w(r)]^3 = x^3 + y^3.$$

Portanto, pelo Teorema Fundamental de Pólya (Teorema 5.50) e por (5.17)*, segue que o inventário padrão é*

$$P_G\left(\sum_{r\in R} w(r), \sum_{r\in R}[w(r)]^2, \sum_{r\in R}[w(r)]^3\right) = P_G(x+y, x^2+y^2, x^3+y^3) =$$

$$= \frac{1}{3}\left[(x+y)^4 + 2(x+y)(x^3+y^3)\right] = x^4 + 2x^3y + 2x^2y^2 + 2xy^3 + y^4. \tag{5.18}$$

Fazendo

$$w(x) = 1 = w(y) \tag{5.19}$$

e substituindo (5.19) *em* (5.18) *segue, pelo corolário do Teorema Fundamental de Pólya (Corolário 5.51) que existem*

$$P_G(2,2,2) = 1^4 + 2\cdot 1^3\cdot 1 + 2\cdot 1^2\cdot 1^2 + 2\cdot 1\cdot 1^3 + 1^4 = 8$$

maneiras diferentes de pintarmos as quatro faces da pirâmide.

Referências Bibliográficas

[1] R. Johnsonbaugh, *Discrete Mathematics*, Prentice Hall, New Jersey, 1993, 4^a Edição.

[2] C. L. Liu, *Introduction to Combinatorial Mathematics*, McGraw-Hill, New York, 1968.