1ª Lista de Exercícios de SMA-180 Matemática Discreta

Eugenio Massa

Lógica

1. Exercícios 1,4,5,6,7,8,9,12,13*,(14!),15 nas páginas 104-105 do livro (seção 3.1, pp131-132 do inlgês).

2. verifique as sequintes equivalências.
   $(a \implies b) = (\overline{a} \vee b)$; $\quad (a \iff b) = \left(\overline{a \oplus b}\right) = \left(\overline{a} \iff \overline{b}\right)$; $\quad (a \oplus b) = \left(\overline{a} \oplus \overline{b}\right)$;
   $(a \implies b) = \left(\overline{b} \implies \overline{a}\right)$
   Mostre que $(a \implies b)$ não é equivalente a $(b \implies a)$

3. Exercícios 7...14 na página 117 do livro (seção 3.2, pp147-149 do inlgês).

4. Negue as seguintes afirmações:
   a) $a \implies b$, b) $(a \implies b) \implies c$ c) $(a \vee b) \wedge \overline{c}$

5. Negue as seguintes afirmações:
   a) "m é par e $m > 10$", b) "m é par se e só se $m > 10$"
   c) $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists H \in \mathbb{R}:\ \forall x > H$ vale $f(x) > M$.
   d) $\exists C \in \mathbb{R}:\ \forall x \in \mathbb{R}$ vale $|f(x)| < C$.
   A quais definições matemáticas correspondem c, d e suas negações?

6. Negue as seguintes afirmações (com quantificadores implícitos):
   a) Os números pares são múltiplos de 4.
   b) As sequências limitadas são convergentes.
   c) As sequências convergentes são limitadas.
   d) Alguns gatos são fêmeas.

7. Exercícios 1,6 na página 126 do livro (seção 3.3, pp159-160 do inlgês).

8. Invente ou procure uma prova
   a) direta, b) por contrapositiva, c) por contradição.

9. Mostre (por indução) as seguintes afirmaçõs:
   a) $\sum_{n=1}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2}$
   b) $\sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$
   c) $\sum_{n=1}^{N} n^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4} = \left(\sum_{n=1}^{N} n\right)^2$
   d) $n! \geq 2^{n-1}$
   e) $\sum_{n=1}^{N} 2^n = 2^{N+1} - 2$
   f) se $x > -1$ então $(1+x)^n \geq 1 + nx$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

g) $n^3 + 2n$ é divisível por 3.

h) se n é ímpar então $n^3 - n$ é divisível por 24 (cuidado... o passo de indução será $P(n) \implies P(n+2)$)

i) se $n \geq 8$ então n é a soma de um múltiplo de 3 com um múltiplo de 5 (considere 0 múltiplo de qualquer número). DICA: é fácil provar que $p(n) \implies p(n+3)$.

j) todo $n \geq 2$ é fatorável como produto de números primos. DICA: vai precisar indução forte: $p(2) \wedge .. \wedge p(n) \implies p(n+1)$; separe os casos de $n+1$ ser ou não primo.

Gabarito

Exercício 4

b) $\overline{(a \wedge \overline{b}) \vee c} = (\overline{a} \vee b) \wedge \overline{c}$

Exercício 5

b) "m é par XOR $m > 10$"

c) $\exists\, M \in \mathbb{R} : \ \forall\, H \in \mathbb{R} \ \exists x > H : \ f(x) \leq M.$

c é $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$, $\overline{d}$ é "f não é limitada"

Exercício 6

b) esiste pelo menos uma sequência limitada que não é convergente. (VERDADE)

d) todos os gatos são machos.