1 O Laplaciano

- **Equação de Laplace**: $-\Delta u(\mathbf{x}) = 0 \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)$
- **Equação de Poisson**: $-\Delta u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)$
- Uma função $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ que satisfaz a equação de Laplace $-\Delta u = 0$ é dita **função harmônica** .
- o Laplaciano é **invariante por rotações e translações**. Por isso aparece em modelos físicos de fenômenos que possuem simetrias deste tipo.

1.1 Problemas típicos

- **problema de Dirichlet**: determinar $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta u = f & em \;\; \Omega, \\ u(x) = g(x) & em \;\; \partial\Omega, \end{cases} \tag{PD}$$

  - distribuição de temperatura ao equilíbrio num corpo com fontes de calor f e **temperatura fixada na fronteira** $g(x)$
  - potencial eletrostático em Ω se a densidade de carga é f e **$\partial\Omega$ é um condutor** (logo o potencial é constante em $\partial\Omega$)

- **problema de Neumann**: determinar $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta u = f & em \;\; \Omega, \\ u_\nu(x) = h(x) & em \;\; \partial\Omega, \end{cases} \tag{PN}$$

  onde ν é a normal externa de $\partial\Omega$.

  - **corpo isolado** termicamente (fluxo de calor nulo, isto é, derivada normal da temperatura nula)
  - campo elétrico ($E = \nabla u$) é conhecido em $\partial\Omega$.
  - para o fluido, $u_\nu = 0$ significa que o fluido não atravessa a fronteira, u_ν fixado é um **fluxo de fluido** entrando/saindo.

- **problema de Robin** determinar $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta u = f & em \;\; \Omega, \\ \alpha(x)u(x) + u_\nu(x) = \beta(x) & em \;\; \partial\Omega, \end{cases} \tag{PR}$$

  - quando o corpo **troca calor** com o exterior o fluxo de calor (derivada da temperatura) é proporcional á diferencia de temperatura com respeito à temperatura externa,

2 Laplaciano em diferentes coordenadas

Laplaciano em $\mathbb{R}^2$ em coordenadas polares

$v(\rho,\theta) = u(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$

$\Delta u = v_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}v_\rho + \frac{1}{\rho^2}v_{\theta\theta}$

Laplaciano em $\mathbb{R}^3$ em coordenadas esféricas

$v(\rho,\theta,\varphi) = u(\rho\cos(\theta)\sin(\varphi),\ \rho\sin(\theta)\sin(\varphi),\ \rho\cos(\varphi)\ )$

$\Delta u = v_{\rho\rho} + \frac{2}{\rho}v_\rho + \frac{1}{\rho^2}\left[v_{\varphi\varphi} + cot(\varphi)v_\varphi + \frac{1}{\sin^2\varphi}v_{\theta\theta}\right]$

Laplaciano em $\mathbb{R}^n$ para função radial

se $u(\mathbf{x}) = v(|\mathbf{x}|) = v(\rho)$

$\Delta u = v_{\rho\rho} + \frac{n-1}{\rho}v_\rho$

Fórmula de Poisson no plano

função harmônica em $B_1(0)$ com dato ϕ em $\partial B_1(0)$

$$v(\rho,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\phi(\xi)\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\xi-\theta)}d\xi$$

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial B_1(0)}\phi(\mathbf{y})\frac{1-|\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}ds_{\mathbf{y}}$$

função harmônica em $B_R(0)$ com dato ϕ em $\partial B_R(0)$

$$v(\rho,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\phi(\xi)\frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\xi-\theta)}d\xi$$

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi R}\int_{\partial B_R(0)}\phi(\mathbf{y})\frac{R^2-|\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}ds_{\mathbf{y}}$$

3 Princípio de máximo

- o operador L satisfaz o **princípio do máximo em Ω na versão fraca** se $Lu \leq 0$ implica
$$\max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \max_{\partial\Omega} u(x). \tag{3.1}$$
- o operador L satisfaz o **princípio do máximo em Ω na versão forte** se $Lu \leq 0$ implica que
$$\text{se } x_0 \in \Omega \text{ é tal que } \; u(x_0) = \max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) \; \text{ então } u \text{ é constante em } \Omega. \tag{3.2}$$

Quando L é linear, trocando u por $-u$ podemos sempre obter afirmações análogas sobre mínimos.

Teorema 3.1. *Se Ω é um aberto conexo e limitado, o operador $-\Delta$ satisfaz o princípio de máximo tanto na versão fraca quanto na versão forte, para funções em $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$,*

Em particular, se $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ é harmônica então valem (3.1), (3.2) e suas versões com mínimo.

Considere o problema de Dirichlet
$$\begin{cases} -\Delta u = f & em \;\; \Omega, \\ u(x) = g(x) & em \;\; \partial\Omega, \end{cases} \tag{PD}$$

Teorema 3.2. *Se $u_1, u_2 \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ são soluções do problema de Dirichlet com a mesma f e com dados na fronteira, respectivamente, g_1 e g_2, então*
$$\max_{\overline{\Omega}} |u_1 - u_2| \leq \max |g_1 - g_2|.$$

Esta é uma forma de **dependência contínua dos dados** e implica **unicidade da solução do problema de Dirichlet** (PD) na classe $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$:

Considere o problema de Dirichlet com condição homogênea
$$\begin{cases} -\Delta u = f & em \;\; \Omega, \\ u(x) = 0 & em \;\; \partial\Omega : \end{cases} \tag{3.3}$$

- $f \leq 0 \;\Rightarrow\; u \leq 0$ em Ω (resp. $f \geq 0 \;\Rightarrow\; u \geq 0$ em Ω).
- $f \leq 0 \;\Rightarrow\; u < 0$ ou $u \equiv 0$ em Ω (resp. $f \geq 0 \;\Rightarrow\; u > 0$ ou $u \equiv 0$ em Ω).

4 Identidade de Lagrange Green e consequências

Seja Ω um **domínio** (aberto e conexo), limitado e com borda regular.

Proposição 4.1. *Dadas $u, v \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ se todas as integrais convergem, valem as seguintes* **identidades de Lagrange-Green**

$$\int_\Omega v\Delta u\, dV = \int_{\partial\Omega} (v\nabla u) \cdot n\, dS - \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u\, dV, \tag{LG1}$$

$$\int_\Omega v\Delta u\, dV = \int_{\partial\Omega} (v\nabla u - u\nabla v) \cdot n\, dS + \int_\Omega u\Delta v\, dV. \tag{LG2}$$

Teorema 4.2. *Se $u, v \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ são ambas soluções do problema de Dirichlet (PD) então $u = v$, se são soluções do problema de Neumann (PN), $u - v =$ constante.*

5 Princípio de Dirichlet

Sejam

$$D_g = \left\{ u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) : \ u = g|_{\partial\Omega} \right\},$$

$$E(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2$$

O **Princípio de Dirichlet** afirma que

$u \in D_g$ é harmônica se e só se $E(u) \leq E(w)$ $\forall w \in D_g$

A função harmônica é a com menor "energia" entre as que satisfazem a condição em $\partial\Omega$.

6 Propriedade do valor médio para funções harmônicas

Definição 6.1.

1. Uma função $u \in C(\Omega)$ é dita **subharmônica** em Ω se
$$u(x) \leq \fint_{\partial B_r(x)} u(y)\, dS_y \quad \text{para todos } x, r \text{ tais que } \overline{B_r(x)} \subset \Omega.$$

2. Uma função $u \in C(\Omega)$ chame-se **superharmônica** em Ω se
$$u(x) \geq \fint_{\partial B_r(x)} u(y)\, dS_y \quad \text{para todos } x, r \text{ tais que } \overline{B_r(x)} \subset \Omega.$$

Esta propriedade é intimamente ligada ao Laplaciano: de fato vale o seguinte

Teorema 6.2. *Seja* $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$

- $-\Delta u \leq 0$ *em* Ω $\iff$ u *é subharmônica .*
- $-\Delta u \geq 0$ *em* Ω $\iff$ u *é superharmônica.*
- $-\Delta u = 0$ *em* Ω $\iff$ *vale a seguinte propriedade* **propriedade do valor médio***:*

$$u(x) = \fint_{\partial B_r(x)} u(y) dS_y = \fint_{B_r(x)} u(y)\, dV_y \qquad \text{para todos } x, r \text{ tais que } \overline{B_r(x)} \subset \Omega. \tag{6.1}$$

A propriedade do valor médio implica na regularidade da função:

Teorema 6.3. *Se* $u \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ *satisfaz a propriedade do valor médio (6.1) em* Ω*, então* $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ *e* $\Delta u = 0$ *em* Ω*.*

Corolário 6.4. *Se* $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ *satisfaz* $-\Delta u = 0$ *em* Ω *então* $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$*.*

6.1 Algumas contas usadas nas provas da slide anterior

Derivada da média esférica[1]

$$
\begin{aligned}
\partial_r \fint_{\partial B_r(x)} u(y) dS_y &= \frac{1}{\omega_n}\partial_r \int_{\partial B_1(0)} [u(x+r\eta)]\, dS_\eta = \\
&= \frac{1}{\omega_n}\int_{\partial B_1(0)} [\nabla u(x+r\eta)\cdot\eta]\, dS_\eta = \\
&= \frac{1}{\omega_n}\int_{B_1(0)} div_\eta[\nabla u(x+r\eta)]\, dV_\eta\,, \\
&= \frac{1}{\omega_n}\int_{B_1(0)} r\,\Delta u(x+r\eta)\, dV_\eta\,, \\
&= \frac{r}{n}\fint_{B_r(x)} \Delta u(y)\, dV_y.
\end{aligned}
$$

Limite da média esférica

$$
\lim_{r\to 0}\fint_{\partial B_r(x)} u(y) dS_y = \lim_{r\to 0}\frac{1}{\omega_n}\int_{\partial B_1(0)} [u(x+r\eta)]\, dS_\eta = u(x)
$$

Molificação u (se $B_\varepsilon(x)\subseteq\Omega$)

$$
\begin{aligned}
u_\varepsilon(x) &:= \int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)u(y)\, dV_y = \int_{B_\varepsilon(x)} \widetilde{\eta}_\varepsilon(|x-y|)u(y)\, dV_y \\
&= \int_0^\varepsilon \widetilde{\eta}_\varepsilon(\rho) d\rho \int_{\partial B_\rho(x)} u(y)\, dS_y \\
&= u(x)\int_0^\varepsilon \widetilde{\eta}_\varepsilon(\rho)\omega_n\rho^{n-1} d\rho = u(x)\int_{B_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon = u(x).
\end{aligned}
$$

[1] ω_n é a superfície de uma esfera de raio 1 em dimensão n.
ω_n/n é o volume de uma bola de raio 1 em dimensão n.

7 Soluções fundamentais

Proposição 7.1. *As funções*

$$\psi(y)=\widetilde{\psi}(|y|)\begin{cases}\dfrac{|y|^{2-n}}{(n-2)\omega_n}+D & para \quad n\geq 3,\\ -\dfrac{\ln(|y|)}{2\pi}+D & para \quad n=2,\\ -\dfrac{|y|}{2}+D & para \quad n=1,\end{cases} \tag{7.1}$$

são radiais, harmônicas em $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, com singularidade na origem. Além disso, $\int_{\partial B_1(0)}\nabla\psi\cdot\nu=-1$.

A função ψ é dita **solução fundamental do Laplaciano** (em $\mathbb{R}^n$).

Seja $B=B_\varepsilon(0)$; apliquemos (LG2) no conjunto $\Omega\setminus B$, com $v=\psi$, $u\in\mathcal{C}^2(\Omega)\cap\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$

$$\int_{\Omega\setminus B}\psi\Delta u=\int_{\Omega\setminus B}u\Delta\psi+\int_{\partial\Omega}(\psi\nabla u-u\nabla\psi)\cdot\nu-\int_{\partial B}(\psi\nabla u-u\nabla\psi)\cdot\nu \tag{7.2}$$

onde

$$-\int_{\partial B}(\psi\nabla u-u\nabla\psi)\cdot\nu=-\widetilde{\psi}(\varepsilon)\int_{\partial B}\nabla u\cdot\nu+\widetilde{\psi}'(\varepsilon)\int_{\partial B}u\xrightarrow{\varepsilon\to 0}-u(0)$$

Corolário 7.2. *então, para $u\in\mathcal{C}^2(\Omega)\cap\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ e para todo $x\in\Omega$.*

$$\boxed{u(x)=\int_\Omega\psi(y-x)[-\Delta u(y)]+\int_{\partial\Omega}[\psi(y-x)\nabla u(y)-u(y)\nabla\psi(y-x)]\cdot\nu}$$

Esta é uma **fórmula de representação**: se $-\Delta u = f$ em Ω e $u = g, u_\nu = h$ em $\partial\Omega$, então

$$u(x) = \int_\Omega \psi(y-x)[f(y)] + \int_{\partial\Omega} [\psi(y-x)h(y) - g(y)\nabla\psi(y-x)\cdot\nu]. \tag{7.3}$$

Infelizmente não fornece uma solução explicita!

Vamos modificar ψ para eliminar o termo em h da fórmula:
procuro $G(y,x) := \psi(y-x) - w_x(y)$ onde, para todo $x \in \Omega$,

$$\begin{cases} -\Delta w_x(y) = 0 & em \;\; \Omega, \\ w_x(y) = \psi(y-x) & em \;\; \partial\Omega, \end{cases} \tag{7.4}$$

como

$$u(x) = \int_\Omega \psi(y-x)[-\Delta u(y)] + \int_{\partial\Omega} [\psi(y-x)\nabla u(y) - u(y)\nabla\psi(y-x)]\cdot\nu$$

$$\int_\Omega u(y)[-\Delta w_x(y)] = 0 = \int_\Omega w_x(y)[-\Delta u(y)] + \int_{\partial\Omega} [w_x(y)\nabla u(y) - u(y)\nabla w_x(y)]\cdot\nu$$

vale então

$$u(x) \;\; = \;\; \int_\Omega G(y,x)[-\Delta u(y)] - \int_{\partial\Omega} [u(y)\nabla_y G(y,x)]\cdot\nu. \tag{7.5}$$

Teorema 7.3. *Se $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)\cap\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ é solução do problema de Dirichlet (PD), então u é dado pela fórmula*

$$\int_\Omega G(y,x)[f(y)] - \int_{\partial\Omega} [g(y)\nabla_y G(y,x)]\cdot n$$

G é chamada **função de Green para a região Ω**

$\boxed{\text{Existe a função de Green?}}$

Explorando simetrias, podemos encontrar:

- A **função de Green para um semiespaço** Ω é

$$G(y,x) = \psi(y-x) - \psi(y-x^*) \tag{7.6}$$

  onde x^* é o simétrico de x do outro lado do semiplano $\partial\Omega$.

- A **função de Green para uma bola** $B = B_1(0)$ é

$$\begin{cases} G(y,x) := \psi(y-x) - \psi(|x|(y-x^*)) & \text{se } x \neq 0, \\ G(y,0) := \psi(y) - \widetilde{\psi}(1). \end{cases}$$

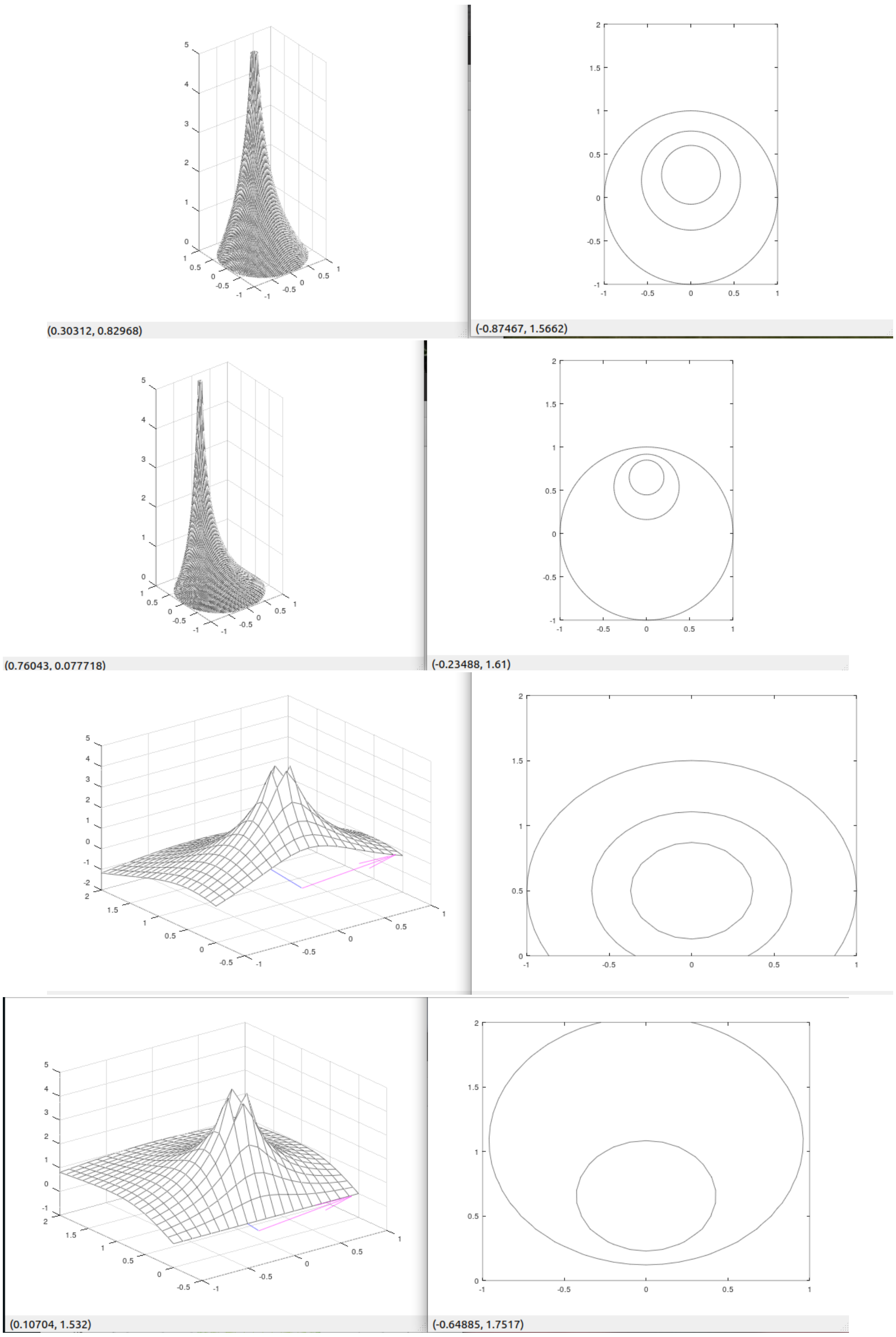
  onde $x^* = \frac{x}{|x|^2}$.

Em particular obtemos a **Formula de Poisson para a bola em qualquer dimensão**:

$$u_g(x) = -\int_{\partial B} [g(y)\nabla_y G(y,x)] \cdot \nu = \frac{1}{\omega_n}\int_{\partial B} g(y)\frac{1-|x|^2}{|y-x|^n}$$

Para o semiespaço $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ x_n > 0\}$

$$u_g(x) = \frac{2x_n}{\omega_n}\int_{\partial\Omega} \frac{g(y)}{|y-x|^n}\,. \tag{7.7}$$


(0.30312, 0.82968)
(-0.87467, 1.5662)
(0.76043, 0.077718)
(-0.23488, 1.61)
(0.10704, 1.532)
(-0.64885, 1.7517)

8 Interpretação eletrostática

Em $\mathbb{R}^3$, se u é o potencial eletrostático e q a densidade de carga elétrica, vale (pondo 1 a constante) $-\Delta u = q$.

- $\psi(y) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|y|}$ representa o potencial eletrostático gerado por uma carga unitária puntiforme isolada em $\mathbb{R}^3$ (potencial tende a zero no infinito).
- $u(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \psi(y-x)[q(y)]\, dV_y = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi}\frac{q(y)}{|y-x|}\, dV_y$ representa o potencial eletrostático gerado por uma distribuição de carga q em $\mathbb{R}^3$ (potencial tende a zero no infinito).
- Se G é a função de Green para o conjunto Ω,
  $G(y,x)$ representa o potencial eletrostático gerado (em y) por uma carga unitária puntiforme posta em x, dentro de uma casca condutora $\partial\Omega$ (potencial zero em $\partial\Omega$).
- $u(x) = \int_\Omega G(y,x)[q(y)]\, dV_y$ representa o potencial eletrostático gerado por uma distribuição de carga q, dentro de uma casca condutora $\partial\Omega$ (potencial zero em $\partial\Omega$).