1 Distribuções

2 Distribuções em $\mathbb{R}$

Definições

- $\mathcal{D} = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}) = \{\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) : \ \phi \equiv 0$ fora de um conjunto limitado$\}$: **funções $\mathcal{C}^\infty$ a suporto compacto**.

- dada $\{\phi_n\} \subseteq \mathcal{D}$ dizemos que $\phi_n \to \phi$ em $\mathcal{D}$ se

$$\begin{cases} \phi_n \equiv 0 \text{ fora de um conjunto limitado comum,} \\ D^k\phi_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} D^k\phi \text{ uniformemente para todo } k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

- **Distribuição**: um funcional linear de domínio $\mathcal{D}$, contínuo com respeito à convergência em $\mathcal{D}$, isto e' $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R} : \phi \mapsto (f, \phi) \in \mathbb{R}$:
  - $(f, a\phi + b\psi) = a(f, \phi) + b(f, \psi)$ para $a, b \in \mathbb{R}$, $\phi, \psi \in \mathcal{D}$,
  - $(f, \phi_n) \to (f, \phi)$ quando $\phi_n \to \phi$ em $\mathcal{D}$.

Denotamos por $\mathcal{D}'$ o espaço das distribuições.

Alguns exemplos:

- dada uma função localmente integrável g podemos definir a distribuição $f : \phi \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} g\phi$

- nem toda distribuição pode ser gerada como acima:

  $\delta_p : \phi \mapsto \phi(p)$

  $\delta_p^k : \phi \mapsto \phi^{(k)}(p)$

Definimos

- $f_n \rightharpoonup f$ (**conv. fraca em $\mathcal{D}'$**): $(f_n, \phi) \to (f, \phi)$ para toda $\phi \in \mathcal{D}$

- derivada de distribuição:

  $f' : \phi \mapsto -(f, \phi')$

2.1 Distribuções em $\mathbb{R}^n$

Podemos definir analogamente **distribuições em $\mathbb{R}^n$**, tomando
$\mathcal{D} = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) = \{\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) : \ \phi \equiv 0$ fora de um conjunto limitado$\}$
e definindo convergência em $\mathcal{D}$ pedindo que $D^\alpha \phi_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} D^\alpha \phi$ uniformemente para todo multiíndice α.

As derivadas parciais serão definidas (pelo teor do divergente)
$D_{x_i} f : \phi \mapsto -(f, D_{x_i}\phi)$
$\nabla f : \phi \mapsto -(f, \nabla\phi)$

Exemplo: a função $u(x,t) = Sc(x+ct) + Sc(x-ct)$ define uma distribuição cujas derivadas são
$u_x = \delta(x+ct) + \delta(x-ct)$ $\qquad u_{xx} = \delta'(x+ct) + \delta'(x-ct)$
$u_t = c\delta(x+ct) - c\delta(x-ct)$ $\qquad u_{tt} = c^2\delta'(x+ct) + c^2\delta'(x-ct)$
logo u é uma solução (no sentido das distribuições) de $u_{tt} = c^2 u_{xx}$.

2.2 Distribuções em Ω

Podemos definir analogamente **distribuições em um aberto limitado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$**, tomando
$\mathcal{D} = \mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) = \{\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) : \ \phi \equiv 0$ fora de um aberto ω t.q. $\overline{\omega} \subset \Omega\}$

exemplo:
seja $\Omega = (-\pi, \pi)$, seja $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$
então $\phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$
$\phi(0) = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n\right) = \frac{1}{\pi} \lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x) \left(1/2 + \sum_{n=1}^N cos(nx)\right) dx$

Logo, no sentido das distribuições em $(-\pi, \pi)$

$$1/2 + \sum_{n=1}^N cos(nx) \rightharpoonup \pi\delta_0$$

$$\sum_{n=-N}^N e^{inx} \rightharpoonup 2\pi\delta_0$$

2.3 Exemplos e aplicações

Laplaciano

Se $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ então $\phi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y-x)[-\Delta\phi(y)]$
Isto significa que, vista como distribuição, $\psi_x(y) = \psi(y-x)$ satisfaz

$$-\Delta\psi_x = \delta_x \quad em\ \mathbb{R}^n$$

Da mesma forma, se $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ então $\phi(x) = \int_{\Omega} G(y,x)[-\Delta\phi(y)]$
Isto significa que, vista como distribuição,

$$-\Delta_y G(y,x) = \delta_x \quad em\ \Omega$$

Calor

Vimos que $\psi(x,t)$ é uma função para todo $t > 0$, mas como distribuição $\psi(t,x) \overset{t\to 0^+}{\rightharpoonup} \delta_0$ em $\mathcal{D}'$.
Além disso, como distribuição em $\mathbb{R}^2$, $\psi(t,x)$ satisfaz

$$(\partial_t\psi - \Delta\psi)(t,x) = \delta_0(t)\delta_0(x)$$

Onda

Analogamente podemos procurar uma solução para

$(\partial_{tt}\psi - \Delta\psi)(t,x) = 0$ com $\psi(x,0) = 0$ e $\psi_t(x,0) = \delta_0$,

impondo que $u(x,t) := \int \psi(x-y,t)g(y)$ seja a solução do problema com $u(x,0) = 0$ e $u_t(x,0) = g$.

n=1: pondo então

$\int \psi(x-y,t)g(y) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g$ obtemos

$$\psi(x,t) = \frac{1}{2}\chi_{[-t,t]}(x) = \frac{1}{2}Sc(t^2 - x^2)$$

n=3: pondo então

$\int_{\mathbb{R}^3} \psi(\mathbf{x}-\mathbf{y},t)g(\mathbf{y}) = t \fint_{\partial B_t(\mathbf{x})} g\,dS; = \frac{1}{4\pi t}\int_{\mathbb{R}} d\rho\,\delta(t-\rho)\int_{\partial B_\rho(\mathbf{x})} g\,dS;$

obtemos

$$\psi(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4\pi t}\delta(t - |\mathbf{x}|)$$

n=2: pondo então

$\int_{\mathbb{R}^2} \psi(\mathbf{x}-\mathbf{y},t)g(\mathbf{y}) = \frac{t^2}{2}\fint_{B_t(\mathbf{x})} \frac{\psi(\mathbf{y})}{\sqrt{t^2-|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2}}\,dV_{\mathbf{y}} = \frac{t^2}{2\pi t^2}\int_{B_t(\mathbf{x})} \frac{\psi(\mathbf{y})}{\sqrt{t^2-|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2}}\,dV_{\mathbf{y}}$

obtemos

$$\psi(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{t^2 - |\mathbf{x}|^2}}\chi_{[-t,t]}(|\mathbf{x}|)$$

3 Transformada de Fourier

Definição:
dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ [1] absolutamente integrável [2] em $\mathbb{R}$ definimos

$$F(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi}\, dx \ :$$

F é a **Transformada de Fourier de f** (indicamos também como $T[f]$)

Para reobter f temos:

$$f(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} F(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi$$

Algumas propriedades:
– T é linear
– F é contínua,
– nem sempre F é integrável: ex $f = \chi_{[-1,1]}$, $T[f] = 2\frac{\sin(\xi)}{\xi}$
– $\lim_{\xi \to \pm\infty} F(\xi) = 0$
– se f é real e par então F é real e par; se f é real e ímpar então F é imaginária com parte imaginária ímpar.

Exemplos e propriedades:

f	F
$e^{-x^2/2}$	$\sqrt{2\pi} e^{-\xi^2/2}$
$e^{-a\|x\|}$	$\frac{2a}{a^2+\xi^2}$
$\chi_{[-a,a]}$	$\frac{2\sin(a\xi)}{\xi}$

$f'(x)$	$i\xi F(\xi)$
$xf(x)$	$iF'(\xi)$
$f(x-a)$	$e^{-ia\xi} F(\xi)$
$e^{iax} f(x)$	$F(\xi - a)$
$\|a\| f(ax)$	$F(\xi/a)$
$f * g$	FG

[1] pode ser $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$
[2] mas a def. pode ser estendida a distribuiçoes: $F(\xi) := (f, e^{-ix\xi})$

algumas transformadas "generalizadas"

f	F
$\delta_0(x)$	1
1	$2\pi\delta_0(\xi)$
$sgn(x)$	$\frac{2}{i\xi}$
$H(x)$	$\frac{1}{i\xi} + \pi\delta_0(\xi)$

Transformada em $\mathbb{R}^n$
analogamente podemos definir
dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ absolutamente integrável em $\mathbb{R}^n$ definimos

$$F(\mathbf{w}) := \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{x}\cdot\mathbf{w}} \, dV_{\mathbf{x}} \ :$$

Para reobter f temos:

$$f(\mathbf{x}) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} F(\mathbf{w}) e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{w}} \, dV_{\mathbf{w}}$$