1 Mudança de variável linear

Consideremos uma *mudança de variáveis linear*, definida pela matriz não singular J:

$$G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{w} = J\mathbf{x}\,. \tag{1.1}$$

J é também o Jacobiano da transformação:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial w_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial w_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial w_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

indicaremos os operadores de derivação com respeito aos dois vetores de variáveis por

$$\partial_{\mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{x}} := \Big[\partial_{x_1} \quad , \; \dots \; , \quad \partial_{x_n}\Big] \text{ e } \partial_{\mathbf{w}} = \Big[\partial_{w_1} \quad , \; \dots \; , \quad \partial_{w_n}\Big]\,.$$

Dada uma função $u(\mathbf{x})$, definamos

$$v(\mathbf{w}) := u(G^{-1}(\mathbf{w})) = u(J^{-1}\mathbf{w})\,; \qquad\qquad u(\mathbf{x}) = v(G(\mathbf{x})) = v(J\mathbf{x})$$

pela regra da cadeia em notação matricial, temos

$$J_u(\mathbf{x}) = J_{v\circ G}(\mathbf{x}) = J_v(G(\mathbf{x}))\,J_G(\mathbf{x})$$

logo $\nabla u(\mathbf{x}) = \nabla v(\mathbf{w})\,J$ e assim

$$\boxed{\partial_{\mathbf{x}} = \partial_{\mathbf{w}} J. \qquad - - - \qquad \partial_{\mathbf{w}} = \partial_{\mathbf{x}} J^{-1}}$$

Observe que podemos obter o mesmo resultado pela fórmula escrita por componentes

$$\partial_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial w_i} = \sum_{i=1}^{n} J_{i,j}\partial_{w_i}\,.$$

1.1 Exemplo

Rotação em $\mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \partial x, & \partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial \xi, & \partial \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Laplaciano:

$$\partial_x^2 + \partial_y^2 = (C\partial_\xi + S\partial_\eta)^2 + (-S\partial_\xi + C\partial_\eta)^2 = \partial_\xi^2 + \partial_\eta^2$$

Invariante por rotações.

Onda:

$$\partial_x^2 - \partial_y^2 = (C\partial_\xi + S\partial_\eta)^2 - (-S\partial_\xi + C\partial_\eta)^2 = (C^2 - S^2)(\partial_\xi^2 - \partial_\eta^2) + 4CS\partial_\xi\partial_\eta$$

A rotação de 45^o transforma $\partial_x^2 - \partial_y^2$ em $2\partial_\xi\partial_\eta$.

Podemos deduzir que a integral geral de $u_{xx} - u_{yy} = 0$ é

$$u(x, y) = f(x + y) + g(x - y).$$

2 Classificação de eq. de segunda ordem

2.1 Duas variáveis, coef. constantes

Considere a equação diferencial linear

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g\,, \tag{2.1}$$

onde os coeficientes a, b, c são constantes.

Supondo $a \neq 0$, podemos escrever como

$$a\left[u_{xx} + 2\frac{b}{a}u_{xy} + \frac{b^2}{a^2}u_{yy} + \left(\frac{ac-b^2}{a^2}\right)u_{yy}\right] + \ldots\,,$$

$$a\left[\left(\partial_x + \frac{b}{a}\partial_y\right)^2 + \left(\frac{ac-b^2}{a^2}\right)\partial_y^2\right]u + \ldots\,,$$

quero

$$\begin{bmatrix}\partial\xi, & \partial\eta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\partial_x + \frac{b}{a}\partial_y, & \delta\partial y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\partial x, & \partial y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{b}{a} & \delta\end{bmatrix},$$

logo

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{b}{a} & \delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi\\ \eta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\xi\\ \frac{b}{a}\xi + \delta\eta\end{bmatrix}.$$

Assim a equação torna-se

$$u_{\xi\xi} + \frac{1}{\delta^2}\left(\frac{ac-b^2}{a^2}\right)u_{\eta\eta} + \ldots$$

Assim a equação torna-se

$$u_{\xi\xi} + \frac{1}{\delta^2}\left(\frac{ac - b^2}{a^2}\right) u_{\eta\eta} + \dots$$

Consideremos o determinante $\Delta = b^2 - ac$

Definição 2.1. Dizemos que a equação (2.1) é:

(H) Hiperbólica se $\Delta = b^2 - ac > 0$: pode ser tansformada em $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + \dots$

(E) Elíptica se $\Delta = b^2 - ac < 0$: pode ser tansformada em $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \dots$

(P) Parabólica se $\Delta = b^2 - ac = 0$: pode ser tansformada em $u_{\xi\xi} + \dots$

Teorema 2.2. *Toda equação de segunda ordem linear a coeficientes constantes da forma (2.1) pode ser reduzida a uma onde os termos de grau dois estão numa dessas três formas, através de uma mudança de variáveis linear.*

Na verdade,

Teorema 2.3. *Se na equação (2.1), a, b, c dependem de x, y, não são todos nulos e a eq. é do mesmo tipo (H, E ou P) em todo um aberto, então pode (pelo menos localmente) ser transformada, através de uma mudança de variáveis, numa nova equação onde os termos de grau dois estão na forma correspondente.*

Argumento via álgebra linear:

Escrevemos $a\partial_{xx} + 2b\partial_{xy} + c\partial_{yy}$ como $\partial_{\mathbf{x}}\mathcal{A}\cdot\partial_{\mathbf{x}}$ onde $\partial_{\mathbf{x}} = \left[\partial_x,\partial_y\right]$ e $\mathcal{A} = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c\end{smallmatrix}\right]$.

Dada a mudança de variáveis $\mathbf{w} = (z,w) = J\mathbf{x}$, temos $\partial_{\mathbf{x}} = \partial_{\mathbf{w}}J$.
Logo $\partial_{\mathbf{x}}\mathcal{A}\cdot\partial_{\mathbf{x}} = \partial_{\mathbf{w}}J\mathcal{A}J^t\cdot\partial_{\mathbf{w}}$, isto é, a matriz $\widetilde{\mathcal{A}}$ correspondente à $\mathcal{A}$ nas novas variáveis é

$$\widetilde{\mathcal{A}} \;=\; \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} = J\mathcal{A}J^t$$

Além disso

$$-\widetilde{\Delta} = AC - B^2 = det(\widetilde{\mathcal{A}}) = det(\mathcal{A})det(J)^2 = (-\Delta)det(J)^2$$

o sinal do determinante é invariante por mudanças de variáveis

---

Sabemos da álgebra linear que dada uma matriz 2x2 simétrica A, sempre existe uma matriz M ortonormal tal que $MAM^t = \left[\begin{smallmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{smallmatrix}\right]$.
Logo M define uma mudança de variáveis que leva a equação numa forma sem a $u_{\xi\eta}$.

Alternativamente, renormalizando as linhas de M, podemos obter os termos diagonais sendo apenas $1, -1$ ou 0. Logo M define uma mudança de variáveis que leva a equação numa das três formas P,H,E.

Observe que

- para a eq. **elíptica**, *qualquer curva é não característica*.
- a eq. **parabólica**, não vincula a derivada segunda na direção da nova variável que não aparece na forma canônica: *curvas com normal nesta direção serão características*.
- a eq. **hiperbólica**, não vincula as derivada segundas na direções das novas variáveis que deixam a eq na forma com apenas a derivada cruzada: *curvas com normal nestas direções serão características*.

2.2 Mais variáveis, coef. constantes

O método acima funciona também para mais de duas variáveis.

Podemos escrever os termos de ordem máximo

$$\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha \, \partial^\alpha u \tag{2.2}$$

como $\partial_{\mathbf{x}} \mathcal{A} \cdot \partial_{\mathbf{x}}$ onde agora $\partial_{\mathbf{x}} = \left[\, {}^{\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_n}} \,\right]$ e

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_{2e_1} & \frac{1}{2} a_{e_1+e_2} & .. & \frac{1}{2} a_{e_1+e_n} \\ \frac{1}{2} a_{e_1+e_2} & a_{2e_2} & .. & \frac{1}{2} a_{e_2+e_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2} a_{e_1+e_n} & \frac{1}{2} a_{e_2+e_n} & .. & a_{2e_n} \end{bmatrix}.$$

Existe uma mudança de variáveis linear que diagonaliza e normaliza $\mathcal{A}$: a nova matriz $\widetilde{\mathcal{A}}$ terá a forma a blocos

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} I_{N_p} & 0 & 0 \\ 0 & -I_{N_n} & 0 \\ 0 & 0 & 0_{N_z} \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

onde N_p, N_n e N_z são, respectivamente, o número de autovalores positivos, negativos e nulos de $\mathcal{A}$.

Definição 2.4. A equação correspondente a (2.2) diz-se:

1. **elíptica** se $\widetilde{\mathcal{A}} = I_n$: os autovalores de $\mathcal{A}$ tem todos o mesmo sinal);

2. **hiperbólica** se

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} I_{N_p} & \\ & -I_{N_n} \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

   com $N_p, N_n > 0$, isto é, os autovalores de $\mathcal{A}$ não são nulos mas tem sinais diferentes;

   - *normalmente hiperbólica* se $N_p = 1$: forma diagonalizada $\partial_{xx}u(x, \mathbf{y}) - \Delta_{\mathbf{y}}u(x, \mathbf{y}) + ... = 0$ (equação da onda);
   - *ultrahiperbólica* se $N_p, N_n > 1$ (não existem problemas físicos assim).

3. **parabólica** se $\det \widetilde{\mathcal{A}} = 0$, isto é, existem autovalores nulos ($N_z > 0$).

   Se $N_z = 1$ e N_n (ou N_p) é nulo, temos a eq. do calor: forma diagonalizada $\partial_x u(x, \mathbf{y}) - \Delta_{\mathbf{y}}u(x, \mathbf{y}) + ... = 0$

- Podemos sempre transformar a equação a coeficientes constantes numa das formas acima, sem derivadas mistas .

Observe que ainda

- para a eq. **elíptica**, *qualquer hipersuperfície é não característica*.
- para a eq. **parabólica e hiperbólica** *existem hipersuperfícies características*.

2.3 Linear a coef. variáveis

Para a equação a coeficientes variáveis,

- podemos escrever a matriz em um ponto fixado, e obter uma **classificação** *(que depende do ponto)*.
- Podemos obter uma **mudança de variável linear** *que diagonaliza a matriz, mas apena no ponto considerado*.
- Em geral, **não existe uma mudança de variável que diagonalize a matriz em todo um aberto** (*excepto no caso em duas variáveis!*).

2.4 Classificação para equações não lineares

No caso de equações não lineares a classificação dependerá, em geral, não apenas da equação mas também da solução considerada.

- O caso **semilinear** é análogo ao linear.
- No caso **quaselinear**, fixada uma solução, podemos substiruí-la nos coeficientes e classificar como no caso linear.

3 Mais sobre 2a ordem, duas variáveis: coef. variáveis

Dada a mudança de variáveis $\mathbf{z} = (z, w) = G(\mathbf{x}) = G(x, y)$, ainda vale que a matriz $\widetilde{\mathcal{A}}$ correspondente à $\mathcal{A}$ nas novas variáveis[1] é

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{A}} \;&=\; \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} = J_G \mathcal{A} J_G^t = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} az_x^2 + 2bz_xz_y + cz_y^2 & az_xw_x + b(z_xw_y + z_yw_x) + cz_yw_y \\ az_xw_x + b(z_xw_y + z_yw_x) + cz_yw_y & aw_x^2 + 2bw_xw_y + cw_y^2 \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

onde agora J_G e $\mathcal{A}$ dependem do ponto. Também vale

$$-\widetilde{\Delta} = AC - B^2 = det(\widetilde{\mathcal{A}}) = det(\mathcal{A}) det(J_G)^2 = (-\Delta) det(J_G)^2 = (ac - b^2)(z_xw_y - z_yw_x)^2,$$

o sinal do determinante é invariante por mudanças de variáveis

[1] Cuidado, os termos de grau menor da equação mudam de forma bem mais complicada, com fórmulas que misturam os coeficientes de ordem diferentes e envolvem derivadas de ordem maior da G

3.1 O caso hiperbólico $\Delta > 0$

Quando $\Delta > 0$ é sempre possível levar a equação à forma $u_{zw} + ... = 0$.

Suponha $a \neq 0$

$\Delta = b^2 - ac > 0$ implica que a equação $A = 0$ fatora:

$$az_x^2 + 2bz_xz_y + cz_y^2 = a(z_x - \lambda_1 z_y)(z_x - \lambda_2 z_y) = 0,$$

onde $\lambda_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}$ (em geral dependendo de (x, y)). A equação $C = 0$ fatora da mesma maneira.

Temos então duas equações independentes para determinar z e w:

$$(z_x - \lambda_1 z_y) = 0\,, \tag{3.1}$$
$$(w_x - \lambda_2 w_y) = 0\,. \tag{3.2}$$

Impondo arbitrariamente dois problemas de Cauchy não-característicos com $z_y \neq 0$ e $w_y \neq 0$ (por exemplo $z(k, y) = y$ e $w(k, y) = y$ ao longo de uma reta vertical $x = k$) obtemos $z, w \in \mathcal{C}^1$ em vizinhança desta reta.

Logo obtemos, localmente, a transformação $(z, w) = G(x, y)$.

Como $\frac{z_x}{z_y} = \lambda_1 \neq \lambda_2 = \frac{w_x}{w_y}$ a transformação satisfaz $det(J_G) \neq 0$.

Definição 3.1. As curvas $z = const$ e $w = const$ são ditas **curvas características** da equação; as novas variáveis z e w são ditas **coordenadas características** (as que põe a equação na forma canônica).

Passando às variáveis características, a equação se torna $u_{zw} + ... = 0$, ou a equivalente $u_{zz} - u_{ww} + ... = 0$ aplicando uma ulterior rotação de 45^o.

3.2 O caso parabólico $\Delta = 0$

Quando $\Delta = 0$ é sempre possível levar a equação à forma $u_{ww} + ... = 0$.

Cuidado: precisamos pedir $\Delta = 0$ em todo um aberto

Suponha $a \neq 0$, ($a = c = 0$ implicaria $b = 0$)

Agora a equação $A = 0$ fatora na forma

$$a(z_x - \lambda_1 z_y)^2 = 0\,.$$

Permite calcular z como anteriormente resolvendo $(z_x - \lambda_1 z_y) = 0$, mas não podemos impor $C = 0$ pois assim w não resultaria independente de z.

É suficiente escolher uma qualquer w que gere uma mudança de variável com z: de fato $A = 0$ e $\Delta = 0$ implica $B = 0$.

Passando às variáveis características, a equação se torna $u_{ww} + ... = 0$.

No caso parabólico definimos

Definição 3.2. As curvas $z = \mathit{const}$ (apenas) são ditas **curvas características** da equação; ainda as novas variáveis z e w são ditas **coordenadas características**.

3.3 O caso elíptico $\Delta < 0$

Quando $\Delta < 0$ é sempre possível levar a equação à forma $u_{zz} + u_{ww} + ... = 0$.

Neste caso as equações não fatoram: precisa obter as duas **coordenadas características** z, w de uma vez, fatorando em $\mathbb{C}$.

Neste caso não existem **curvas características**.

4 Propagação de singularidades em problemas hiperbólicos.

Definição 4.1. Suponhamos que

- uma superfície γ divida o conjunto Ω em duas regiões Ω_l e Ω_r
- a função $z : \Omega \to \mathbb{R}$ seja
  - contínua tanto em Ω_l como em Ω_r
  - suas restrições $z_l = z|_{\Omega_l}$ e $z_r = z|_{\Omega_r}$ sejam estendíveis por continuidade até $\overline{\Omega_l}$ e $\overline{\Omega_r}$, respectivamente (admitiremos então z_l, z_r definidas em $\overline{\Omega_l}$ e $\overline{\Omega_r}$, respectivamente).

Dado $\mathbf{p} \in \gamma$, denotamos por $[\![z]\!]\,(\mathbf{p})$ o **salto de z no ponto p**, isto é

$$[\![z]\!]\,(\mathbf{p}) = z_r(\mathbf{p}) - z_l(\mathbf{p}).$$

Proposição 4.2. *Seja $u \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ $(k \geq 2)$ uma solução de*

$$Lu = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g\,,$$

e u_l, u_r suas restrições a Ω_l e Ω_r, respectivamente. Suponhamos que u_l e u_r sejam de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ e suas derivadas até a ordem $k+1$ possam ser prolongadas até γ. Suponhamos também que os coeficientes da equação sejam de classe $\mathcal{C}^{k-1}$. Então um salto na derivada $k+1$-ésima de u só é possível ao longo de uma curva característica e o salto será apenas entre as derivadas na direção normal.

Os mesmos resultados valem para não lineares, mas as características dependem da solução

Num operador elíptico não pode ter descontinuidade em nenhuma ordem de derivação!

Lema 4.3. *Dada uma função $z : \Omega \to \mathbb{R}$ que seja contínua em Ω e de classe $\mathcal{C}^1$ tanto em $\overline{\Omega_l}$ como em $\overline{\Omega_r}$, vale*

$$[\![z_x]\!]\,(\xi(y),y)\,\xi'(y) + [\![z_y]\!]\,(\xi(y),y) = [\![z_x]\!]\,\xi' + [\![z_y]\!] = 0 \tag{4.1}$$

ao longo de γ. Isto significa que $[\![z_\tau]\!] = 0$: o salto é apenas na derivada normal!

Consideremos

$$Lu = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g\,, \tag{4.2}$$

onde os coeficientes dependem apenas de (x, y) e são contínuos.

Seja $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, $u_l, u_r \in \mathcal{C}^2$ soluções de (4.2) e suas derivadas até a ordem dois possam ser prolongadas até γ.

— por ser $\mathcal{C}^1(\Omega)$ vale $[\![u]\!] = [\![u_x]\!] = [\![u_y]\!] = 0$ sobre γ.

— Subtraindo a equação (4.2) calculada dos dois lados de γ obtemos (lembrando que os coeficientes são contínuos) $a\,[\![u_{xx}]\!] + 2b\,[\![u_{xy}]\!] + c\,[\![u_{yy}]\!] = 0$. Juntando esta equação às obtidas aplicando o lema 4.3 aplicado a u_x e u_y obtemos

$$\begin{cases} a\,[\![u_{xx}]\!] & + & 2b\,[\![u_{xy}]\!] & + & c\,[\![u_{yy}]\!] & = 0 \\ \xi'\,[\![u_{xx}]\!] & + & [\![u_{xy}]\!] & & & = 0 \\ & & \xi'\,[\![u_{xy}]\!] & + & [\![u_{yy}]\!] & = 0 \end{cases}\,, \tag{4.3}$$

cujo determinante é

$$\begin{vmatrix} a & 2b & c \\ \xi' & 1 & 0 \\ 0 & \xi' & 1 \end{vmatrix} = a - 2b\xi' + c(\xi')^2;$$

logo u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} também serão contínuas (saltos nulos) a menos que este determinante seja zero, isto é, que a curva $(\xi(y), y)$ seja característica.

Os saltos nas derivadas segundas não serão independentes mas deverão satisfazer a condição

$$[\![u_{yy}]\!] = -\,[\![u_{xy}]\!]\,\xi' = [\![u_{xx}]\!]\,(\xi')^2. \tag{4.4}$$

Consideremos o caso de uma solução (clássica) em $\mathcal{C}^2(\Omega)$ de (4.2), que seja de classe $\mathcal{C}^3$ em Ω_l e Ω_r e tenha salto nas derivadas terceiras ao longo de γ, supondo agora também que os coeficientes da equação sejam de classe $\mathcal{C}^1$:

obtemos $a [\![u_{xxx}]\!] + 2b [\![u_{xyx}]\!] + c [\![u_{yyx}]\!] = 0$ e

$$\begin{aligned}
\xi' [\![u_{xxx}]\!] + [\![u_{xxy}]\!] &= 0 \\
\xi' [\![u_{xyx}]\!] + [\![u_{xyy}]\!] &= 0 \\
\xi' [\![u_{yyx}]\!] + [\![u_{yyy}]\!] &= 0
\end{aligned}$$

logo $u_{xxx}, u_{xxy}, u_{xyy}, u_{yyy}$ também serão contínuas (saltos nulos) a menos que a curva $(\xi(y), y)$ seja característica.

iterando demonstramos a proposição.