1 Problemas de primeira ordem

1.1 linear - semilinear

A forma mais geral para uma EDP semilinear de primeira ordem em $\mathbb{R}^n$ é

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x})\partial_{x_i}u(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, u); \tag{1.1}$$

pondo os coeficientes a_i num vetor $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ podemos escrever (1.1) na forma

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) \cdot \nabla u(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, u) : \tag{1.2}$$

a equação prescreve a derivada direcional $\mathbf{a} \cdot \nabla u$.

Consideremos o problema de determinar a solução que tenha valor prescrito numa hipersuperfície regular S dada parametricamente como
$S = \{\mathbf{x} = g(\mathbf{s}) : \mathbf{s} \in \omega\}$ onde $g : \omega \to \mathbb{R}^n$, sendo $\omega \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$:

$$\begin{cases} \mathbf{a}(\mathbf{x}) \cdot \nabla u(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, u). \\ u(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) & \text{em } S \end{cases} \tag{1.3}$$

Observação: para que esteja satisfeita a condição de não-caracteristicidade, pediremos que o vetor $\mathbf{a}$ nunca seja tangente a S.

$\boxed{\text{Estratégia:}}$ saindo de cada ponto de S, construir uma curva ao longo da qual a (1.1) torna-se uma EDO, isto é, calculamos as linhas integrais do campo vetorial $\mathbf{a}(\mathbf{x})$.

Para cada $\mathbf{s} \in \omega$, resolvemos o sistema de EDOs em $\mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{x}_\mathbf{s}'(t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}_\mathbf{s}(t))\,, \qquad \mathbf{x}_\mathbf{s}(0) = g(\mathbf{s}) \ : \tag{1.4}$$

a solução $\mathbf{x}_\mathbf{s}(t)$ é uma curva em forma parametrica em $\mathbb{R}^n$, que sai do ponto $g(\mathbf{s})$, e cujo vetor tangente $\mathbf{x}_\mathbf{s}'(t)$ coincide com o campo $\mathbf{a}(\mathbf{x}_\mathbf{s}(t))$ em todo ponto.

Chamaremos estas curvas $\boxed{\text{curvas características}}$ da equação.

Agora se $u(\mathbf{x})$ é uma solução da EDP então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[u(\mathbf{x}_\mathbf{s}(t))] &= \nabla u(\mathbf{x}_\mathbf{s}(t)) \cdot \mathbf{x}_\mathbf{s}'(t) = \nabla u(\mathbf{x}_\mathbf{s}(t)) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{x}_\mathbf{s}(t)) \\ &= F(\mathbf{x}_\mathbf{s}(t), u(\mathbf{x}_\mathbf{s}(t)) \ : \end{aligned} \tag{1.5}$$

Logo definindo $v_\mathbf{s}(t) := u(\mathbf{x}_\mathbf{s}(t))$ podemos calcular $v_\mathbf{s}$ com a EDO adicional

$$v_\mathbf{s}'(t) = F(\mathbf{x}_\mathbf{s}(t), v_\mathbf{s}(t))\,, \qquad v_\mathbf{s}(0) = \varphi(g(\mathbf{s})). \tag{1.6}$$

O método das características consiste em resolver o **Sistema característico**

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathbf{x}_\mathbf{s}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}_\mathbf{s}(t)), & \mathbf{x}_\mathbf{s}(0) = g(\mathbf{s}), \\ \frac{d}{dt}v_\mathbf{s}(t) = F(\mathbf{x}_\mathbf{s}(t), v_\mathbf{s}(t)), & v_\mathbf{s}(0) = \varphi(g(\mathbf{s})), \end{cases} \tag{1.7}$$

obtendo a solução u ao longo das projeções características:

$$u(\mathbf{x}_\mathbf{s}(t)) = v_\mathbf{s}(t)\,.$$

A solução explicita $u(\mathbf{x})$ deverá ser obtida calculando $\mathbf{s}, t$ em função de $\mathbf{x}$.

Observação: O método funciona graças ao fato que o sistema de EDOs sempre possui solução pelo menos local. Além disso, pela dependência contínua dos dados das EDOs, pode ser provado que $\mathbf{x}_\mathbf{s}(t)$ define localmente uma mudança de variáveis regular e invertível, que permite o cálculo de $u(\mathbf{x})$.

Em geral, está garantida a solução apenas em uma vizinhança de S.

1.2 quaselinear

No caso quaselinear podemos escrever a equação como

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) \cdot \nabla u(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, u(x)). \tag{1.8}$$

A condição de não-caracteristicidade é ainda $\mathbf{a}(x,u) \cdot \nu \neq 0$ em S: agora depende também dos dados de Cauchy.

Interpretação geométrica:

$$(\mathbf{a}(x,u), F(x,u)) \cdot (\nabla u(x), -1) = 0; \tag{1.9}$$

o vetor de $(\mathbf{a}(x,u), F(x,u)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ é tangente ao gráfico de u.

(1.8) pode ser resolvida pelo mesmo método, mas o sistema característico resulta acoplado pois $\mathbf{a}$ depende da solução:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathbf{x}_\mathbf{s}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}_\mathbf{s}(t), v_\mathbf{s}(t)), & \mathbf{x}_\mathbf{s}(0) = g(\mathbf{s}), \\ \frac{d}{dt}v_\mathbf{s}(t) = F(\mathbf{x}_\mathbf{s}(t), v_\mathbf{s}(t)), & v_\mathbf{s}(0) = \varphi(g(\mathbf{s})), \end{cases} \tag{1.10}$$

Por consequência, neste caso, as curvas características podem ser diferentes para diferentes soluções.

1.3 Resumo método das características

- resolvemos o sistema característico
- se u é solução da equação $\mathbf{a}(\mathbf{x}, u) \cdot \nabla u(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, u)$ então $u(\mathbf{x_s}(t)) = b(\mathbf{x_s}(t), u(\mathbf{x_s}(t))$ logo $u(\mathbf{x_s}(t)) = v_\mathbf{s}(t)$
- se $\mathbf{x_s}(t)$ define uma mudança de variáveis $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}^n$, então de $v_\mathbf{s}(t)$ obtemos $u(\mathbf{x})$

Este método leva ao

Teorema 1.1. *Se no problema*

$$\begin{cases} \mathbf{a}(\mathbf{x}, u) \cdot \nabla u(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, u). \\ u(\underline{x}) = \varphi(\mathbf{x}) & \text{em } S = \{\mathbf{x} = g(\mathbf{s})\}, \end{cases} \tag{1.11}$$

S é uma superfície de classe $\mathcal{C}^1$, $\mathbf{a}, b, \varphi$ são funções reais de classe $\mathcal{C}^1$ e a condição de não-característicidade está satisfeita, então existe uma vizinhança $N(S)$ tal que existe uma única solução $u \in \mathcal{C}^1(N(S))$ do problema, a qual depende com continuidade dos dados.

Além disso, tal solução pode ser calculada resolvendo o sistema característico na forma (1.10) e obtendo u em função de x eliminando os parâmetros.

O ponto fundamental da prova é mostrar que o sistema característico gera (localmente) a mudança de variáveis $\mathcal{C}^1$, o que é consequência da cond. de não-caracteristicidade e da dep. contínua dos dados para EDOs.

2 Eq. de transporte

Considere o problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0 \\ u(x,0) = f(x) : \end{cases} \tag{2.1}$$

a solução é $u(x,t) = f(x-ct) \qquad (f \in \mathcal{C}^1?)$

f está sendo transportado com velocidade uniforme c (p.ex. temperatura num rio).

$$\begin{cases} u_t + c(x,t)u_x = 0 \\ u(x,0) = f(x); \end{cases} \tag{2.2}$$

agora f é transportado com velocidade variável (ao longo das características).

Estes problemas saem do seguinte modelo (transporte):

- a quantidade u é transportada inalterada por um meio cuja velocidade é $c(x,t)$;
- as soluções do problema de EDO $x'(t) = c(x(t),t),\ x(0) = x_0$ fornecem as trajetórias das partículas do meio;
- podemos dizer então que $u(x(t)) = const$, logo

$$[u(x(t))]' = u_x\, x' + u_t = u_x\, c + u_t = 0.$$

3 Eq. de conservação

Considere o seguinte modelo:

$$\begin{cases} u_t + (c(x,t)u)_x = 0 \\ u(x,0) = f(x); \end{cases} \tag{3.1}$$

posso reescrever como $\boxed{u_t + c(x,t)u_x = -c_x(x,t)u:}$ u não é mais constante,

é diluído ou concentrado durante o transporte conforme se afastam/juntam as características.

Estes problemas saem do seguinte modelo (conservação):

- a incógnita u representa a concentração (linear) de uma substância física conservada, que é transportada por um meio cuja velocidade é c.
- fixado um intervalo $[a,b]$, a quantidade de substância em $[a,b]$ é $Q(t) = \int_a^b u(x,t)\,dx$,
- por ser conservada, $Q(t)$ só pode variar por estar saindo o entrando substância dos extremos do intervalo, isto é,

  $$Q'(t) = (uc)(a,t) - (uc)(b,t)$$

  (o fluxo de substância que passa por um ponto será a concentração multiplicada pela velocidade)
- Se todas as funções envolvidas são regulares, obtemos

  $$= \int_a^b u_t\,dx = -\int_a^b (uc)_x\,dx$$

- valendo isso para todo intervalo $[a,b]$ concluímos que $u_t + (uc)_x = 0$

OBS. Neste caso pode fazer sentido considerar c que depende de u: a escolha $c = u/2$ leva à equação (quase-linear) de Burger $u_t + (u^2/2)_x = u_t + uu_x = 0$.