

9ª Lista de Exercícios de SMA169 Equações diferenciais parciais

Eugenio Massa

Laplaciano 3.

1. Resolva o exercício 21 - pag 198 do livro.
2. a) Escreva a formula $u(x) = \int_{\Omega} \psi(y-x)(-\Delta u(y)) + \int_{\partial\Omega} [\psi(y-x)\nabla u(y) - \nabla\psi(y-x)u(y)] \cdot n$ no caso em dimensão 1.
b) Verifique a validade da fórmula para o caso $u(x) = x^2$ em $[0, 1]$.
3. a) Calcule explicitamente a função de Green em dimensão um, isto é, para $\Omega = (0, 1)$. Use ela para calcular a solução de $u'' = x$, $u(0) = 1$, $u(1) = 2$.
b) Calcule explicitamente a função de Neumann (veja livro ex 21 p198) em $\Omega = (0, 1)$. Use ela para calcular a solução de $u'' = 2x$, $u'(0) = 1$, $u'(1) = 0$. Verifique se deu certo!
4. Resolva os seguintes problemas, procurando por soluções radiais (observe que $\rho^2/2n$ é solução particular de $\psi''(r) + (n-1)\psi'(r)/r = 1$).
 - a) $[-\Delta u = 0$ em $B_2(0) \setminus \overline{B_1(0)}$, $u = a$ em $\partial B_1(0)$, $u = b$ em $\partial B_2(0)$].
 - b) $[-\Delta u = 1$ em $B_1(0)$, $u = 0$ em $\partial B_1(0)$].
 - c) $[-\Delta u = 1$ em $B_2(0) \setminus \overline{B_1(0)}$, $u = a$ em $\partial B_1(0)$, $u = b$ em $\partial B_2(0)$].
 - d) $[-\Delta u = 1$ em $B_1(0) \setminus \overline{B_\varepsilon(0)}$, $u_n = 0$ em $\partial B_1(0)$, $u = 0$ em $\partial B_\varepsilon(0)$]. O que acontece se $\varepsilon \rightarrow 0$? [deixe as equações indicadas no caso geral e resolva apenas para $n = 3$]
5. Encontre a função de Green para o primeiro quadrante em \mathbb{R}^2
6. Resolva o problema $[-\Delta u = 1$ em $B_1(0)$, $u = 0$ em $\partial B_1(0)$], em dimensão 2, na forma $u = v + w$, sendo:
 - a) v uma solução de $-\Delta v = 1$ que dependa só de x
 - b) w uma solução de $[-\Delta w = 0$ em $B_1(0)$, $w = -v$ em $\partial B_1(0)$] (use separação de variáveis em coordenadas polares).