8ª Lista de Exercícios de SMA169 Equações diferenciais parciais

Eugenio Massa

Laplaciano 2.

1. a) Resolva o exercício 5 - pag 184 do livro. O que aconteceria se h não tivesse média 0?
   b) sugira uma justificação física para o termo $\int_{\partial D} hw$ estar incluído na energia do sistema (lembre que a condição de Neumann na interpretação da membrana do tambor representa uma borda livre de se movimentar mas sujeita à força h).
   c) sugira uma formulação de mínimo para resolver o problema de Dirichlet para a equação $-\Delta u = f$ (lembre que f representa uma força aplicada à membrana).
   d) domonstre a validade do método do ponto (c).

2. Seja $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ soluçao de $-\Delta u + b(x) \cdot \nabla u = c(x)u$ no domínio limitado e regular Ω. Mostre (adaptando a demonstração de um princípio de máximo) que se $c < 0$ e $u|_{\partial\Omega} = 0$, então $u \equiv 0$. Mostre com um exemplo simples que isso poderia ser falso com $c > 0$.
   (Sugestão: mostre que um máximo não pode ser positivo e um mínimo não pode ser negativo).

3. Use o resultado anterior para mostrar unicidade de solução $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)\cap\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ para o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + f(x) & em\ \Omega \\ u = g & em\ \partial\Omega \end{cases}$$

   quando $\lambda < 0$.

   Mostre com um exemplo que a solução não é única no caso $\lambda = 1$ e $\Omega = [0, \pi]$, e também no caso $\lambda = 2$, $\Omega = [0, \pi] \times [0, \pi]$.

4. Use as identidades de Lagrange Green para mostrar unicidade de solução $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ para o problema do exercício anterior e para o Problema de Robin

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) & em\ \Omega \\ \alpha u + u_\nu = \beta & em\ \partial\Omega \end{cases}$$

   com $\alpha > 0$.

   Mostre com um exemplo que a solução não é única no caso $\alpha = -1$ e $\Omega = [-1, 1]$ e também no caso $\alpha = -2$ e $\Omega = B_1(0)$.