7ª Lista de Exercícios de SMA169 Equações diferenciais parciais

Eugenio Massa

Laplaciano 1.

1. Exercícios do livro:
   pag 160 ex n. 2,6,7,8,9.

2. Considere o Problema
   $(P) \qquad -\Delta u = 0$ in $Q = (0,\pi)\times(0,\pi)$ com condição $u = 0$ nos três lados $x = 0$, $y = 0$ e $x = \pi$
   a) Resolva o problema (P) por separação de variáveis. Repare que existem infinitas soluções (problema mal posto: faltam condições)
   b) adicione a (P) a condição $u_y(x,0) = sin(nx)$. Repare que existe uma única solução (a var. sep.), mas ela torna-se sempre maior se $n \to \infty$ (problema mal posto: falta de dep. contínua dos dados)
   c) adicione a (P) a condição $u(x,\pi) = sin(nx)$. Repare que existe uma única solução (a var. sep.), e $|u| \le 1$ (problema aparentemente bem posto)
   d) adicione a (P) a condição $u_y(x,\pi) = sin(nx)$. Repare que existe uma única solução (a var. sep.), e vale $|u|, |u_x|, |u_y| \le 1$ e também $|u| \to 0$ se $n \to \infty$ (problema aparentemente bem posto)

3. Use o exercício anterior para escrever a solução quando, nos casos b,c,d, a condição $sin(nx)$ é substituída por uma função ϕ desenvolvível em série de senos:
   $$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$
   (calcule os coeficientes da série da possível solução em termos dos coeficientes b_n)

   Justifique as seguintes afirmações:

   – no caso (b) se $b_n \simeq \frac{1}{n^k} : \; k \in \mathbb{N}$ então a série para u não converge. Uma condição suficiente para garantir a convergência é $|b_n| \le e^{-4n}$. (*Isso significa que precisa uma ϕ muito regular para ter solução*)

   – nos casos (c,d) se b_n é uma seq. limitada então a série para u converge uniformemente em qualquer compacto K contido em Q. Também a série das derivadas termo a termo de qualquer ordem converge uniformemente em K. Além disso, se $|b_n| \le C/n^2$ então a série para u (ou para u_y) converge ao dato na borda de Q. (Isso significa que mesmo com ϕ pouco regular a solução existe e é C^∞ em Q).

4. Calcule a solução do problema de Dirichlet para a equação $-\Delta u = 0$ no circulo de raio 1 em $\mathbb{R}^2$, com as condições $u(1,\theta) = \sin(\theta)$ e em seguida com $u(1,\theta) = \sin^2(\theta)$. Use coordenadas polares mas depois ponha a solução nas variáveis x, y e verifique a equação.
   Repita considerando o problema de Neumann com condições $u_r(1,\theta) = \sin(\theta)$ e com condições $u_r(1,\theta) = \cos^2(\theta) - 1/2$.
   Repita considerando o problema de Robin com condições $(u_r + u)(1,\theta) = 1 + \sin(\theta)$ e com condições $(u_r - u)(1,\theta) = 1 + \sin(\theta)$. São ambos resolúveis?

5. Calcule a solução do problema de Dirichlet no domínio exterior dado por $\mathbb{R}^2$ menos o circulo de raio 1 com as condições $u(1,\theta) = 1 + \sin(3\theta)$ mais a condição u limitada (sugestão: lembre o que foi feito no círculo... agora a origem não está no dimínio!)