6^{a} Lista de Exercícios de SMA169 Equações diferenciais parciais

Eugenio Massa

Séries de Fourier.

1. Seguindo a prova vista em aula, mostre que para que os coeficientes da série S_f satisfaçam
$$|a_n, b_n| \leq \frac{C}{n^2}$$
e logo $S_f \to f$ uniformemente em $\mathbb{R}$, é suficiente que f seja C^2 excepto em um número finito (em $[-\pi, \pi]$) de pontos nos quais é contínua e existem as der. primeiras laterais.

   (faça a prova considerando apenas un desses pontos posto em p e integrando por partes duas vezes em $[-\pi, p]$ e em $[p, \pi]$).

2. Veja a série de Fourier de cada uma das funções a seguir:

   a) $f(x) = |\sin(x)| \quad : S_f = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(2nx)}{4n^2 - 1}$

   b) $f(x) = |x|$ em $x \in [-\pi, \pi]$: $\quad S_f = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}$

   c) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in (-\pi, 0] \\ 1 & \text{se } x \in (0, \pi] \end{cases} \quad : \quad S_f = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin((2n-1)x)}{2n-1}$

   d) $f(x) = \sin^2(x) \quad : S_f = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$

   e) $f(x) = sgn(x)\sin^2(x)$ em $[-\pi, \pi]$: $\quad S_f = -\frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin((2n-1)x)}{(2n-1)(2n+1)(2n-3)}$

   f) $f(x) = x$ em $x \in [-\pi, \pi]$: $\quad S_f = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} sin(nx)}{n}$

   –Verifique algumas delas como exercício de cálculo dos coeficientes (me avisem se encontram erros!!)
   –Repare no decaimento dos coeficientes em função da regularidade da (extensão 2π-periódica da) função: (a,b) são contínuas, (d) é C^∞, (e) é derivável, (c,f) tem descontinuidades.

3. Para cada função do exercício anterior diga para onde convergem as séries de Fourier encontradas, nos pontos $x = -\pi,\ 0,\ \pi/2,\ \pi$. Sugestão: esboce o gráfico de cada uma e busque os pontos de descontinuidade, se eles existirem).

4. Escreva a série de Fourier da função 2π-periódica e ímpar, que em $[0, \pi)$ é dada pelas funções a seguir:
   a) $f(x) = 25$, b) $f(x) = \sin(x)$, c) $f(x) = x$. (Aproveite as séries do ex 2).

5. Escreva a série de Fourier da função 2π-periódica e par, que em $[0, \pi]$ é dada pelas funções do exercício 4. Compare os resultados.

6. Resolva a equação do calor
$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{em } (0, \pi) \times (0, \infty) \\ u(0, t) = 0 = u(\pi, t) & \text{para } t \in [0, \infty) \\ u(x, 0) = f(x) & \text{para } x \in (0, \pi) \end{cases}$$
sendo $f(x)$ cada uma das funções do exercício 4 (use os resultados do exercício).

7. Resolva a equação do calor nos casos do exercício anterior, substituindo a condição de extremos a temperatura costante $u(0, t) = 0 = u(\pi, t)$, pela condição de extremos isolados $u_x(0, t) = 0 = u_x(\pi, t)$ (use os resultados do exercício 5)

8. Para os problemas nos dois exercícios acima, para onde converge a solução quando $t \to \infty$? Compare os resultados.
   discuta a convergência uniforme de $u(x,0)$, $u(x,1)$ e $u_x(x,1)$.