

3ª Lista de Exercícios de SMA169 Equações diferenciais parciais

Eugenio Massa

Mudanças de variáveis e classificação.

1. Exercícios do livro:
pag 31,32: ex 1,2,3,5.
2. Escreva as seguintes equações com respeito às novas variáveis (rotação) $z = x \cos(t) + y \sin(t)$, $w = -x \sin(t) + y \cos(t)$.
a) $u_{xx} - u_{yy} = 1$, b) $u_{xx} + u_{yy} = 1$, c) $u_y - u_{xx} = u^2$, d) $u_x + u_y = u$.
e) Escreva a expressão da derivada k-esima ($k \in \mathbb{N}$) $\partial_x^k u$ nas novas variáveis.
3. Classifique as seguintes equações.
a) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = u_x - u_y$
b) $4u_{xx} + 12u_{xy} + 5u_{yy} = 6u_x - u_y^2$
c) $u_{xx} + (1 + x^2)u_{yy} + u_{xy} = 0$
4. Encontre as regiões do plano onde a seguinte equação è, respectivamente, hiperbólica elíptica ou parabólica:
 $(1 + x)u_{xx} + 2xyu_{xy} - y^2u_{yy} = 6u_x - u_y^2$
5. Classifique as seguintes equações em 3 variáveis.
a) $u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} + u_{zz} = u_x - u_y - u_z$
b) $yu_{xx} + zu_{yy} + 2u_{zy} + u_{zz} = 0$
c) $14u_{xx} + u_{yy} + z^2u_{zz} + 2zu_{zy} = 0$
6. Mostre que a equação $u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy} = 0$ é parabólica em correspondência de qualquer sua solução não constante.
7. a) Classifique quanto a ser hiperbólica, parabólica ou elíptica, as seguintes equações, em correspondência da solução dada.
$$e1) \quad u_{xx}u_x^2 - u_{yy}u^2 = u_y \quad [sol \ u(x, y) = x + 3].$$
$$e2) \quad u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - 2u_{xz} + u_x - 2u_y = u + e^y \quad [sol \ u(x, y, z) = xe^y].$$
$$e3) \quad u_{xx}u_x^2 - u_{yy}u^2 = 2u_x^2 \quad [sol \ u(x, y, z) = x^2 + x].$$

b) Em quais casos o caráter da equação não depende da solução?
8. Considere a equação $u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = 0$. Classifique ela e depois encontre uma apropriada mudança de variáveis que leva a equação na forma canônica correspondente. Enfim obtenha a solução geral a partir da forma canônica.
Agora obtenha a solução geral da equação $u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = u$ pelo mesmo método.
9. Considere a equação $u_{xx} - 4u_{xy} + 3u_{yy} = 0$. Classifique ela e depois encontre uma apropriada mudança de variáveis que leva a equação na forma canônica correspondente. Enfim obtenha a solução geral a partir da forma canônica.
10. Considere a equação $u_{xx} - 4u_{xy} + 5u_{yy} = 0$. Classifique ela e depois encontre uma apropriada mudança de variáveis que leva a equação na forma canônica correspondente.
Sabendo que $v = \xi\eta$ e $v = \xi^2 - \eta^2$ satisfazem $\Delta v = 0$, encontre as soluções correspondentes da equação inicial.