

**2ª Lista de Exercícios de SMA169 Equações diferenciais parciais**

*Eugenio Massa*

**Problemas de primeira ordem.**

1. Exercícios do livro:  
pag 9,10: ex 1,...,11.

2. a1) Verifique que os dados sejam compatíveis com a equação e calcule a solução:

$$\begin{cases} u_x + u_y = u^2 \\ u(x, 0) = h(x) \end{cases} \quad \text{para } x \in \mathbb{R}.$$

a2) Trocando a condição por  $u(x, -x) = x$ , mostre que a solução explode na hipérbole  $y^2 = x^2 - 4$ .

b) Verifique que os dados sejam compatíveis com a equação e calcule a solução:

$$\begin{cases} xu_x + yu_y + u_z = u \\ u(x, y, 0) = h(x, y) \end{cases}$$

c) Considere o seguinte problema em  $\{x > 0\}$ : verifique que os dados sejam compatíveis com a equação e calcule a solução

$$\begin{cases} -yu_x + xu_y = u \\ u(x, 0) = h(x) \end{cases}$$

Represente a solução desenhando as curvas características e descrevendo a solução ao longo delas.

Existe uma solução definida em todo  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ?

Existiria se a equação fosse  $-yu_x + xu_y = 0$ ? Qual seria a condição inicial adequada?

3. a) Verifique que os dados sejam compatíveis com a equação e calcule a solução (via características) do problema

$$\begin{cases} xuu_x - u_y = 0 \\ u(x, 0) = x \end{cases} \quad \text{para } x \in \mathbb{R}$$

Represente a solução desenhando as curvas características e descrevendo a solução ao longo delas (sol implícita  $x = ue^{-uy}$ ).

b) Repita com a condição  $u(x, 0) = 1$ .

c) Repita com a equação  $xuu_x - u_y = -1$  e a condição  $u(x, 0) = 0$ .

4. Considere o problema

$$\begin{cases} uu_x - u_y = -u \\ u(x, 0) = f(x), \end{cases}$$

a) Discuta existência e unicidade da solução.

b) Resolva o problema pelo método das características, até onde der.

c) Termine a resolução no caso  $f(x) = x$ : escreva a solução explicitamente e desenhe as características.

d) Qual é o maior conjunto de existência da solução do problema? Explique.

5. Considere o problema

$$\begin{cases} uu_x + u_y = 1 \\ u(s, s) = 0 \end{cases}$$

- a) verifique que os dados sejam compatíveis com a equação.
- b) calcule a solução  $u(x, y)$  usando o método das características.
- c) desenhe as curvas características.
- d) desenhe a maior região onde a solução obtida das características pode ser estendida.
- e) repita com a condição  $u(s, s) = 1$